CLASSES PRÉPARATOIRES - PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

ÉLECTROMAGNÉTISME

Prépas MPSI - PCSI - PTSI

1re année

Précis de PHYSIQUE

Cours
Exercices résolus

J.-L. QUEYREL
J. MESPLEDE

Bréal

CLASSES PRÉPARATOIRES
PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

Précis de physique

ÉLECTROMAGNÉTISME

MPSI, PCSI, PTSI

3e édition

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

J.-L. Queyrel
Professeur en classe de Mathématiques Spéciales
au Lycée du Parc à Lyon

J. Mesplède
Maître de Conférences à l'Université Lyon I

Bréal
1, rue de Rome 93561 Rosny Cedex

Dans la même collection

Physique

- Mécanique 1re année (MPSI, PCSI, PTSI)
- Mécanique 1re année (complément PCSI)
- Mécanique 2e année
- Electrocinétique 1re année (MPSI, PCSI, PTSI)
- Electricité 2e année
- Thermodynamique 1re année (MPSI, PCSI)
- Optique 1re année (MPSI, PCSI, PTSI)
- Optique 2e année

Chimie

- Thermodynamique et cinétique chimique
- Chimie 1re année (MPSI, PTSI)
- Solutions aqueuses
- Atomistique et chimie minérale
- Chimie organique 1re et 2e année (PCSI, PC)

« Le logo ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit tout particulièrement dans le domaine des sciences humaines et sociales (ou de sciences, techniques, médecine ; ou de droit ; ou d'enseignement), le développement massif du **photocopillage**.

Le code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, du présent ouvrage est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 3, rue d'Hautefeuille, 75006 Paris) ».

© Bréal
Toute reproduction même partielle interdite
Dépôt légal : août 1995
ISBN : 2 85394 790 4

AVANT-PROPOS

Les étudiants des classes préparatoires aux Grandes Écoles trouveront dans cette collection **l'ensemble des connaissances de physique et de chimie** exigées aux concours d'entrée, conformément aux **nouveaux programmes** en vigueur.

Afin de favoriser une assimilation rapide, nous avons choisi **une présentation concise** : dans chaque chapitre, le lecteur trouvera les définitions, les théorèmes et les démonstrations qu'il ne faut pas ignorer. Les exercices d'application ont souvent pour origine les problèmes ou les questions d'oral posés aux concours d'entrée aux Grandes Écoles.

C'est par une lecture active que l'étudiant tirera le meilleur profit de cette collection. Il pourra par exemple suivre la démarche suivante :

- acquisition des connaissances du cours : définitions, théorèmes, démonstrations ;
- recherche des solutions des exercices d'application ;
- étude comparative des solutions proposées par lui-même et par l'auteur.

Après les énoncés des exercices types, des « indications » permettent au lecteur une démarche graduée : chercher seul ou s'inspirer des suggestions de méthode.

Les solutions des exercices d'application ont été rédigées en liaison avec le chapitre correspondant, car leur objectif essentiel est de favoriser une meilleure connaissance du cours.

En fin d'ouvrage, une sélection de problèmes corrigés issus des concours permettra de comprendre et d'intégrer les méthodes de résolution.

Des annexes présentent des applications industrielles et scientifiques.

Nous espérons que cette collection, spécifiquement destinée aux préparationnaires, sera pour eux un outil de travail efficace et pratique. Elle intéressera également les étudiants du premier cycle universitaire.

Si elle peut apporter aux étudiants une contribution sérieuse à leur réussite, nous serons récompensés de notre tâche.

Les Auteurs

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

SOMMAIRE

Avant-propos 3

PARTIE 1 ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

Chapitre 1 - Généralités sur l'électrostatique

1 - Les deux sortes d'électricité 7
2 - Les différentes façons d'électriser un corps 7
3 - Charges ponctuelles - Distributions continues de charges 8

Chapitre 2 - Principe de Coulomb

1 - Loi de Coulomb 9
2 - Principe de Coulomb 10
3 - Vérifications expérimentales de la loi de Coulomb 11
Annexe : la loi de Coulomb et les forces de l'univers 14
Exercices-types 15
Solutions 16

Chapitre 3 - Champ électrostatique

A - DÉFINITIONS DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE 21
1 - Définition 21
2 - Équation aux dimensions et unités 22
3 - Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle unique 22
4 - Champ électrostatique créé par un système de charges ponctuelles discrètes 23
5 - Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges 24
B - FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE 25
6 - Flux du champ électrostatique à travers une surface élémentaire 25
7 - Flux du champ électrostatique à travers une surface finie non fermée 26
8 - Flux du champ électrostatique à travers une surface fermée 26
9 - Généralisation : Théorème de Gauss 27
10 - Lignes de champ 27
11 - Symétries, antisymétries et invariances du champ électrostatique 32
Exercices-types 35
Solutions 38

Chapitre 4 - Potentiel électrostatique

1 - Rappels 59
2 - Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle unique 59
3 - Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges discrètes 61
4 - Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges 62
5 - Surfaces équipotentielles 62
6 - Continuité du potentiel 64
7 - Extremums de potentiel 64
Annexe : quelques applications techniques de l'électrostatique 65
Exercices-types 67
Solutions 70

Chapitre 5 - Dipôle électrostatique

1 - Définitions 87
2 - Potentiel créé à grande distance par un dipôle 88
3 - Champ créé à grande distance par un dipôle 89
4 - Positions principales de Gauss 90
5 - Lignes de champ - Surfaces équipotentielles 91
6 - Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle 92
Annexe : Le dipôle électrostatique en chimie 95
Exercices-types 97
Solutions 99

Chapitre 6 - Énergie électrostatique d'un système de charges

1 - Énergie électrostatique d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique extérieur 111
2 - Énergie d'un système de charges ponctuelles en nombre fini 112
3 - Énergie d'une distribution continue de charges 113
4 - Énergie électrostatique d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur 114
Exercices-types 115
Solutions 116

PARTIE 2 MAGNÉTOSTATIQUE DANS LE VIDE

Chapitre 7 - Forces magnétiques

1 - Actions exercées par des charges ponctuelles en mouvement sur une charge ponctuelle elle-même en mouvement 123
2 - Loi de Laplace 124
3 - Balance de Cotton 126
4 - Effet Hall 127
Exercices-types 129
Solutions 131

Chapitre 8 - Champ magnétique

1 - Loi de Biot et Savart 135
2 - Remarque importante concernant la loi de Biot et Savart 137
3 - Champ magnétique créé par une charge en mouvement 137
4 - Définition de l'ampère 138
5 - Théorème d'Ampère 139
6 - Conservation du flux magnétique 139
7 - Distribution de courants non filiformes 140
8 - Topographie du champ magnétique 141
9 - Symétries, antisymétries et invariances du champ magnétique 145
Annexe : le magnétisme terrestre 148
Exercices-types 150
Solutions 153

Chapitre 9 - Dipôle magnétique

1 - Moment magnétique d'un circuit filiforme 169
2 - Champ magnétique créé par une spire circulaire à grande distance 172
3 - Définition du dipôle magnétique 174
4 - Lignes de champ du dipôle magnétique 174
5 - Positions principales de Gauss 175
6 - Action d'un champ magnétique uniforme sur un dipôle 176
Annexe : l'enregistrement magnétique 177

Chapitre 10 - Quelques problèmes

1 - Champ créé par quatre charges disposées aux sommets d'un carré 179
Solution 180
2 - Champ et potentiel créés par une distribution sphérique et des distributions planes 185
Solution 186
3 - Champ et potentiel créés par des fils 189
Solution 192
4 - Études d'une disiribution de charges à symétrie sphérique 198
Solution 202
5 - Production d'un champ magnétique uniforme 211
Solution 213
6 - Modélisation du champ magnétique terrestre 217
Solution 220

PARTIE 1
ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

1 GÉNÉRALITÉS SUR L'ÉLECTROSTATIQUE

1. Les deux sortes d'électricités
2. Les différentes façons d'électriser un corps
3. Charges ponctuelles – Distributions continues de charges

L'électrostatique est la partie de l'électricité s'intéressant au comportement des charges électriques immobiles. On supposera, jusqu'au chapitre 6 compris, qu'il en est ainsi.

1- LES DEUX SORTES D'ÉLECTRICITÉ

On distingue :

– L'**électricité positive** obtenue par exemple sur une baguette de verre frottée avec du drap ;

– L'**électricité négative** obtenue par exemple sur une baguette d'ébonite frottée avec de la peau de chat.

Les expériences montrent que :

– deux corps chargés d'électricités différentes s'attirent ; deux corps chargés d'électricités identiques se repoussent ;

– les deux corps électrisés attirent les corps légers tels que bouts de papier, poussières, etc. ;

– il existe deux catégories de corps : les **isolants** (verre, soie, ébonite par exemple) sur lesquels l'électricité ne peut pas se déplacer et les **conducteurs** (métaux, électrolytes, sol par exemple) sur lesquels l'électricité peut se déplacer.

L'électricité négative est due à un excès d'électrons (particules chargées négativement) tandis que l'électricité positive est due à un défaut d'électrons.

2 - LES DIFFÉRENTES FAÇONS D'ÉLECTRISER UN CORPS

On peut électriser un corps :

– par frottement : en frottant ce corps avec un autre. Le signe de l'électricité obtenue dépend des corps en présence ;

– par contact : en mettant en contact le corps avec un autre préalablement électrisé. Si le corps que l'on veut électriser est un isolant, l'électricité n'apparaît que sur la zone de contact ;

– par influence ;

– par compression (piézo-électricité) : cela est réservé à certains corps (quartz par exemple) ;

– par chauffage (pyroélectricité) : cela est également réservé à certains corps.

3 - CHARGES PONCTUELLES – DISTRIBUTIONS CONTINUES DE CHARGES

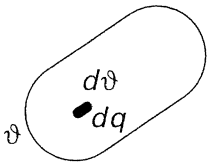
On dit que nous sommes en présence de charges ponctuelles si les dimensions du volume chargé sont infiniment petites par rapport aux dimensions auxquelles on se place (c'est l'analogue du point matériel).

Si l'on considère un volume de dimensions non infiniment petites et si ce volume est chargé, on peut considérer que l'électricité est continue (bien qu'en fait il n'en soit pas ainsi puisque l'électron a une charge bien connue et que toute charge est un multiple de la charge électronique).

Ainsi, un volume élémentaire $d\vartheta$ pris dans un volume chargé ϑ sera considéré comme une charge ponctuelle de valeur dq.

On appelle **densité volumique de charges** la quantité :

$$\rho = \frac{dp}{d\vartheta}$$



Unités : ρ s'exprime en $C.m^{-3}$, la charge électrique s'exprimant en coulombs (C).

Pour une charge ponctuelle $d\vartheta \to 0$, $dq \neq 0$; on doit donc considérer que pour une charge ponctuelle ρ est infinie.

La charge totale portée par le volume chargé sera :

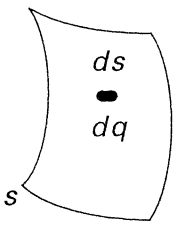
$$q = \iiint_{\vartheta} dq = \iiint_{\vartheta} \rho \, d\vartheta$$

Si $\rho = cte$, le volume est dit **uniformément chargé**.

Alors, $q = \rho.v$.

Si l'on a, non un volume, mais une surface chargée, on appelle **densité surfacique** ou **superficielle** de charges la quantité :

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

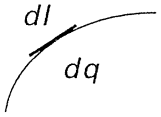


la charge dq étant portée par un élément de surface ds de la surface chargée.

Unité : σ s'exprime en $C \cdot m^{-2}$. Si $\sigma = cte$, la surface est dite **uniformément chargée**.

Enfin, si l'on a des charges réparties sur une ligne seulement, on appelle **densité linéique de charges** la quantité :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$



Unité : λ s'exprime en $C.m^{-1}$.

Si $\lambda = cte$, la ligne est dite **uniformément chargée**.

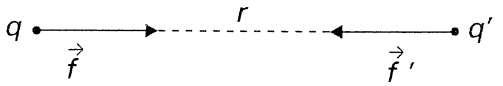
2 PRINCIPE DE COULOMB

1. Loi de Coulomb
2. Principe de Coulomb
3. Vérifications expérimentales de la loi de Coulomb

1- LOI DE COULOMB

Soient deux charges ponctuelles q et q' distantes de r et au repos. La charge q' exerce sur la charge q une force $\vec{f}$, la charge q exerce sur la charge q' une force $\vec{f}\,'$ égale, d'après le principe de l'action et de la réaction, à $-\vec{f}$ de module :

$$\left|\vec{f}\right| = \left|\vec{f}\,'\right| = k\frac{|q||q'|}{r^2}$$



$|q|$ et $|q'|$ étant les valeurs absolues des charges électriques q et q' et k étant une constante dépendant des unités choisies pour q, q', r, f et de la nature du milieu dans lequel se trouvent les charges. Les forces $\vec{f}$ et $\vec{f}\,'$ sont répulsives si q et q' sont de même signe, attractives si q et q' sont de signes différents.

Expression vectorielle

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction AA' orienté de A vers A'. Vectoriellement, on peut écrire :

$$\vec{f}\,' = k\frac{qq'}{r^2}\vec{u}.$$

Si q et q' sont de même signes, $\vec{f}$ est répulsive, le produit $q.q'$ est alors positif.

Si q et q' sont de signes contraires, $\vec{f}$ est attractive, le produit $q.q'$ est alors négatif.

L'expression vectorielle ci-dessus de $\vec{f}$ est donc bien vérifiée.

Nous nous limiterons au cas du vide (ou, ce qui revient sensiblement au même, au cas de l'air) et au Système International d'unités.

Dans ces conditions, on pose :

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

et k vaut, avec les unités du Système International, 9.10^9, soit :

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi.10^9} SI}$$

La loi de Coulomb s'écrira donc :

$$\boxed{\vec{f}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2} \vec{u}}$$

On établit souvent une distinction entre la charge q', sur laquelle on considère la force $\vec{f}'$, et la charge q dont la présence au voisinage de q' crée la force $\vec{f}'$.

q est la **charge active**, q' est la **charge passive.**

Il est bien évident que les rôles de q et q' peuvent être inversés. Les notions de charges active et passive sont donc essentiellement relatives.

2 - PRINCIPE DE COULOMB

L'expérience montre que la loi de Coulomb n'est vérifiée que de façon approchée pour les corps électrisés que l'on utilise habituellement.

Cela tient au fait que ces corps, même de petites dimensions, ne peuvent pas être considérés comme des charges ponctuelles.

La loi de Coulomb doit être considérée comme une loi limite valable seulement dans le cas où les charges considérées sont effectivement ponctuelles (cas idéal).

Devant ce manque de vérification rigoureuse, on a préféré poser cette loi comme principe fondamental de l'électrostatique sous le nom de **Principe de Coulomb.**

Soit un référentiel galiléen $(\mathfrak{R})$ et deux charges ponctuelles q et q' au repos par rapport à $(\mathfrak{R})$ et distantes de r. Pour un observateur au repos par rapport à $(\mathfrak{R})$, q exerce sur q' une force appliquée à q', portée par la droite joignant q et q', attractive si les deux charges sont de signes contraires, répulsive si elles sont de même signe dont le module est :

$$f' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q||q'|}{r^2}.$$

Si le milieu présent entre les deux charges est le vide et si l'on utilise les unités du Système International :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 SI, \text{ soit } \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi.10^9} SI$$

3 - VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES DE LA LOI DE COULOMB

Les vérifications expérimentales de la loi de Coulomb se feront autant que possible sur des charges de dimensions très faibles.

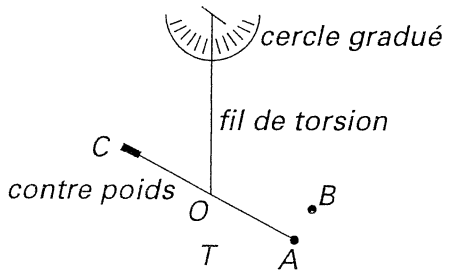
Néanmoins, ces charges ne seront jamais ponctuelles. Aussi ne doit-on pas s'attendre à avoir une vérification d'une précision extraordinaire.

En général, on se contente de vérifier la variation en $\frac{1}{r^2}$ du module de la force.

On peut citer deux méthodes de vérification :

A. Méthode statique

On utilise la balance de Coulomb schématisée ci-contre. Deux boules identiques A et B, considérées comme ponctuelles, sont placées l'une (A) sur une tige isolante T, l'autre (B) en un point fixe. La tige isolante est maintenue horizontale par un contrepoids C. L'ensemble C,T, A est suspendu à un fil de torsion. On amène A et B en contact et on électrise l'ensemble. Les deux boules prennent la même charge q puisqu'elles sont identiques. La tige T prend alors une position d'équilibre correspondant à une torsion α. En admettant la loi de Coulomb, la boule A est soumise à une force :



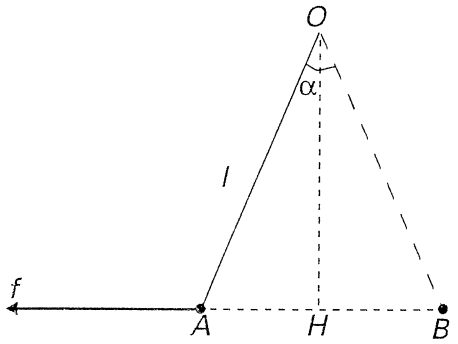
$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{AB^2}.$$

Posons $OA = l$. On a alors :

$$AB = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$$

soit :

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$



Le moment de f par rapport à l'axe de rotation est :

$$\mathcal{M}\vec{f} = f.OH = fl\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ donc } \mathcal{M}\vec{f} = \frac{q^2\cos\frac{\alpha}{2}}{16\pi\varepsilon_0 l\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ce moment est équilibré par le moment du couple de torsion $C\alpha$. Donc :

$$C\alpha = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Si on tourne le fil d'un angle β de façon à rapprocher A de B, α prend une nouvelle valeur α' telle qu'à l'équilibre :

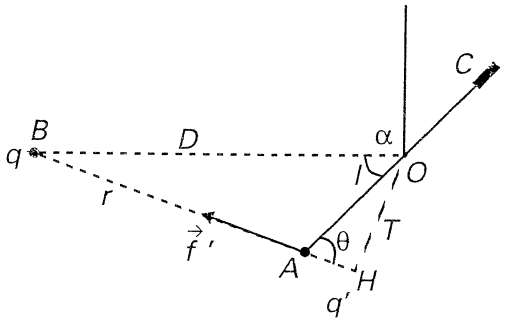
$$C(\alpha' + \beta) = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l} \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin^2\frac{\alpha'}{2}} ;$$

d'où :

$$\frac{\alpha' + \beta}{\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin^2\frac{\alpha'}{2}} \cdot \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } \frac{\alpha' + \beta}{\alpha} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}} .$$

En donnant à β différentes valeurs, Coulomb a vérifié cette relation (en fait cette méthode est peu précise comme on l'a écrit plus haut).

B. Méthode dynamique



Sur une tige T isolante, on place une boule A portant une charge q' et à l'autre extrémité un contrepoids pour maintenir la tige horizontale.

L'ensemble est suspendu à un fil de torsion de constante C et a un moment d'inertie J. En l'absence de toute autre charge, le système constitue un pendule de torsion de période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$

Plaçons à grande distance une charge q à une distance D de O. La force $\vec{f}'$ agissant sur A a alors pour module, toujours en admettant la loi de Coulomb :

$f' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2}$ (q et q' représentant les valeurs absolues des charges).

Son moment par rapport à l'axe de rotation (si q et q' sont de même signe) est :

$$\mathcal{M}_{\vec{f}'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2} \cdot OH = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2} \cdot l\sin\theta$$

α étant l'angle de la tige par rapport à sa position d'équilibre, on a :

$$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{D}{\sin(\pi - \theta)} = \text{d'où}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{f}'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2} \frac{Dl}{r} \sin\alpha .$$

La distance D étant grande, en envisageant les petites oscillations, il vient :

$$r^2 = D^2 + l^2 - 2Dl\cos\alpha \approx D^2 + l^2 - 2Dl = (D - l)^2 ;$$

donc :

$$\mathcal{M}\vec{f}' = -\frac{qq'\mathrm{Dl}\alpha}{4\pi\varepsilon_0 (D-l)^3} .$$

L'équation différentielle du mouvement du pendule sera donc :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -C\alpha - \frac{qq'\mathrm{Dl}}{4\pi\varepsilon_0 (D-l)^3}\alpha .$$

La période sera alors :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C+\dfrac{qq'\mathrm{Dl}}{4\pi\varepsilon_0 (D-l)^3}}} .$$

On en déduit :

$$\frac{T^2}{T'^2} = 1 + \frac{qq'\mathrm{Dl}}{4\pi\varepsilon_0 (D-l)^3 C} ,$$

en donnant à D différentes valeurs et en mesurant chaque fois T', on peut vérifier cette relation et donc la variation de f' en $\frac{1}{r^2}$.

Annexe : LA LOI DE COULOMB ET LES FORCES DE L'UNIVERS

La Physique moderne regroupe les différentes forces de l'Univers en quatre types d'interactions :

- l'interaction forte ;
- l'interaction faible ;
- l'interaction électromagnétique ;
- l'interaction gravitationnelle.

Les interactions faible et forte n'agissent qu'à très courte distance, leurs effets ne dominent qu'à l'intérieur des noyaux des atomes, lors de l'interaction des particules élémentaires. Les interactions gravitationnelle et électromagnétique sont actives sur de grande distance ; mais la force de Coulomb, partie intégrante de l'interaction électromagnétique, est considérablement plus importante que les forces gravitationnelles de sorte que celles-ci sont négligeables.

Ainsi, au niveau atomique, les forces électromagnétiques dominent. Mais, dès que des quantités de matières plus importantes sont mises en jeu, les données changent.

L'existence de charges aussi bien positives que négatives et qui peuvent annihiler leurs effets, fait que les forces électrostatiques peuvent être globalement très petites, voire nulles.

Parallèlement, la masse étant toujours positive, les forces gravitationnelles augmentent avec la quantité de matière. Ainsi, à l'échelle planétaire et stellaire, les effets gravitationnels deviennent-ils importants.

Dans la matière elle-même, les forces électrostatiques sont entièrement responsables de toutes les liaisons qui se produisent entre atomes ou molécules. Cependant, les distances sont telles que l'on ne peut pas considérer les atomes, les molécules ou les ions comme des points et il faut tenir compte de leur structure électronique.

La loi de Coulomb, sous sa forme simple donnée dans le cours, ne peut pas être utilisée telle quelle pour calculer les forces d'interactions atomiques, bien qu'elle donne un ordre de grandeur des forces attractives existant dans les solides à structure ionique.

De multiples efforts ont été faits pour relier les quatre types d'interactions en un seul type.

Une première approche a consisté à unir les interactions faible et électromagnétique en une seule théorie dite théorie électrofaible.

La seconde étude a consisté à relier l'interaction forte et la théorie électrofaible en une théorie de grande unification (G.T.U). Cette dernière théorie présente des aspects beaucoup plus spéculatifs que la théorie électrofaible mais elle s'est révélée d'un grand intérêt dans la description des débuts de l'Univers.

Jusqu'à maintenant, l'interaction gravitationnelle n'a toujours pas pu être incorporée à une théorie générale. De plus, certains aspects expérimentaux observés dans les mines conduisent à envisager une cinquième, voire une sixième interaction, soit plus vraisemblablement une modification de l'interaction gravitationnelle.

EXERCICES-TYPES

- PENDULE SIMPLE ÉLECTRIQUE

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur l et d'une masse ponctuelle m portant une charge q. Sur la verticale du point de suspension à la distance $l + D$, on place une charge q' fixe de même signe que q. Calculer la période du pendule pour les petites oscillations.

Application numérique :

$l = 1m$, $g = 9{,}81 m \cdot s^{-2}$, $D = 1m$, $q = q' = 10^{-8} C$, $m = 1g$.

- ÉQUILIBRE DE TROIS BOULES CHARGÉES

Soient trois boules identiques A, B, C. A et B sont fixes, distantes de d, et portent des charges respectives Q et Q' de même signe. La boule C peut se déplacer librement sur la droite AB ; elle est initialement neutre. On l'amène au contact de A et on l'abandonne.

Déterminer sa position d'équilibre. On admettra que les boules sont ponctuelles.

Application numérique :

$Q = 2 \cdot 10^{-8} C$, $Q' = 10^{-8} C$, $d = 1m$.

03 - MOUVEMENT D'UNE BOULE CHARGÉE

Reprendre l'exercice 2 en supposant que la boule C a une masse m. Calculer la période des oscillations de la boule C autour de sa position d'équilibre. On ne considèrera que les oscillations de petite amplitude et on prendra pour masse de C : $m = 10^{-3} kg$.

04 - DOUBLE PENDULE ÉLECTRIQUE

En un même point O sont fixés deux fils isolants identiques de longueur l auxquels sont fixées deux boules identiques de masse m, qu'on considèrera comme ponctuelles. On transmet à l'ensemble une charge Q.

Calculer l'angle que font les deux fils.

Application numérique :

$Q = 10^{-8} C$, $l = 1m$, $m = 10^{-3} kg$, $g = 10 m \cdot s^{-2}$

Tracer la courbe $\alpha = f(Q)$.

INDICATIONS

01 - Faire l'inventaire des forces et écrire la relation fondamentale de la dynamique.

02 - Que peut-on dire, à l'équilibre, des forces de Coulomb ? Conclure.

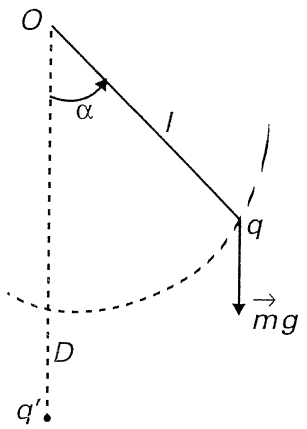
03 - Déterminer la résultante des forces de Coulomb et écrire la relation fondamentale de la dynamique.

04 - Écrire la condition d'équilibre.

SOLUTIONS

01 - Les oscillations étant de petite amplitude, on peut considérer la force qui s'exerce entre q et q' comme verticale et constante, de module :

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{D^2}$$



Cette force est répulsive puisque q et q' ont même signe. Tout revient à changer le poids réel mg en poids apparent

$mg - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{D^2}$ soit mg en $mg\left(1 - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 D^2 mg}\right)$.

La période des oscillations du pendule sera donc :

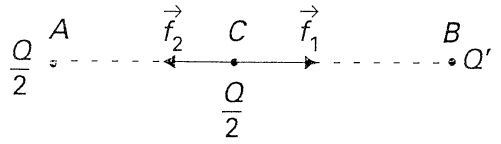
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1 - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 D^2 g}\right)}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 D^2 gm}}}$$

Numériquement il vient :

$$T = 2{,}006\,(1 + 4{,}857 \cdot 10^{-5})\ s$$

l'écart est parfaitement négligeable dans le cas général.

02 -



C prend la charge $\frac{Q}{2}$ et sur A il reste $\frac{Q}{2}$.

Soit $r = AC$.

On a $BC = d - r$

A exerce sur C une force $\vec{f}_1$:

$$f_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{Q^2}{4}}{r^2} l$$

B exerce sur C une force $\vec{f}_2$:

$$f_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{QQ'}{2}}{(d-r)^2}$$

À l'équilibre $f_1 = f_2$. Donc :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{QQ'}{2(d-r)^2}$$

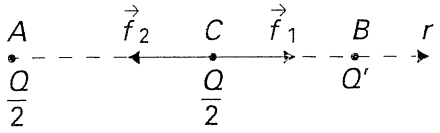
d'où $$\frac{Q}{2r^2} = \frac{Q'}{(d-r)^2}$$

ou $$\frac{d-r}{r} = \sqrt{\frac{2Q'}{Q}}$$

d'où $$\boxed{r = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{2Q'}{Q}}}}$$

Numériquement, il vient : $\boxed{r = 0{,}50\,m}$

03 - Pour une abscisse $\overrightarrow{AC} = r$, $\vec{u}_r$ étant le vecteur unitaire de l'axe Ar, on a



$$\vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{4r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{QQ'}{2(d-r)^2}\vec{u}_r$$

La résultante est donc :

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2}\vec{u}_r\left(-\frac{Q'}{(d-r)^2}+\frac{Q}{2r^2}\right)$$

Soit C_0 la position d'équilibre de C correspondant à une distance r_0 telle que $\vec{f} = 0$.

Posons $x = r - r_0$. Il vient :

$$\vec{f} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2}\vec{u}_r\left(-\frac{Q'}{(d-r_0-x)^2}+\frac{Q}{2(r_0+x)^2}\right)$$

$$\vec{f} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\vec{u}_r\left(-\frac{Q}{(d-r_0)^2\left(1-\frac{x}{d-r_0}\right)^2}+\frac{Q}{2r_0^2\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^2}\right)$$

En supposant $x << (d-r_o)$ et $x << r_0$ il vient en développant au 1er ordre :

$$\vec{f} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\vec{u}_r\left[-\frac{Q'}{(d-r_0)^2}\left(1+2\frac{x}{d-r_0}\right)+\frac{Q}{2r_0^2}\left(1-2\frac{x}{r_0}\right)\right]$$

soit : $$\vec{f} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\vec{u}_r\left[\underbrace{-\frac{Q}{(d-r_0)^2}+\frac{Q}{2r_0^2}}_{=0}-\frac{2Q'x}{(d-r_0)^3}-\frac{Qx}{r_0^3}\right]$$

donc : $$\vec{f} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q'}{(d-r_0)^3}+\frac{Q}{r_0^3}\right)x\vec{u}_r$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrira alors :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q'}{(d-r_0)^3}+\frac{Q}{r_0^3}\right)x$$

En posant

$\omega^2 = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 m}\left(\dfrac{2Q'}{(d-r_0)^3}+\dfrac{Q}{r_0^3}\right)$, on retrouve l'équation différentielle d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 m}\left(\dfrac{2Q'}{(d-r_0)^3}+\dfrac{Q}{r_0^3}\right)}}.$$

On peut simplifier cette expression en tenant compte de la valeur de r_0. On a (exercice 2) :

$$\frac{d-r_0}{r_0} = \sqrt{\frac{2Q'}{Q}}$$

Donc :
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 m(d-r_0)^3}\left(2Q'+\dfrac{(d-r_0)^3}{r_0^3}Q\right)}}$$

ou
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 m(d-r_0)^3}\left(2Q'+2Q'\sqrt{\dfrac{2Q'}{Q}}\right)}}$$

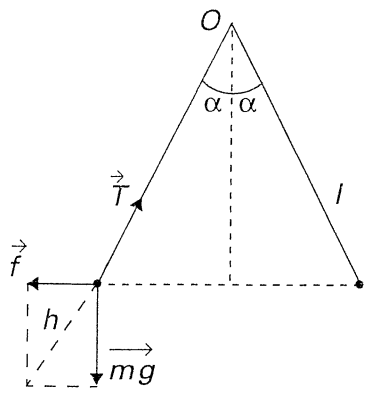
ou finalement

$$\boxed{T = \frac{4\pi r_0}{Q\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 m r_0}\left(1+\sqrt{\dfrac{Q}{2Q'}}\right)}}}$$

Application numérique :

$$\boxed{T = 37\,s}$$

04 - Les deux boules étant identiques, leur charge est la même : $\dfrac{Q}{2}$



À l'équilibre $\vec{T}+\vec{f}+\vec{mg} = 0$

$$\frac{f}{mg} = \tan\alpha$$

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\dfrac{Q^2}{4}}{4l^2\sin^2\alpha}$$

d'où : $$\frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha} = mg\tan\alpha$$

Soit :
$$\boxed{\sin^2\alpha\tan\alpha = \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 l^2 mg}}$$

Application numérique.

En assimilant $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ à α il vient :

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \approx 1{,}78 \cdot 10^{-2}\,\text{rad} \\ \alpha \approx 1^\circ\end{array}}$$

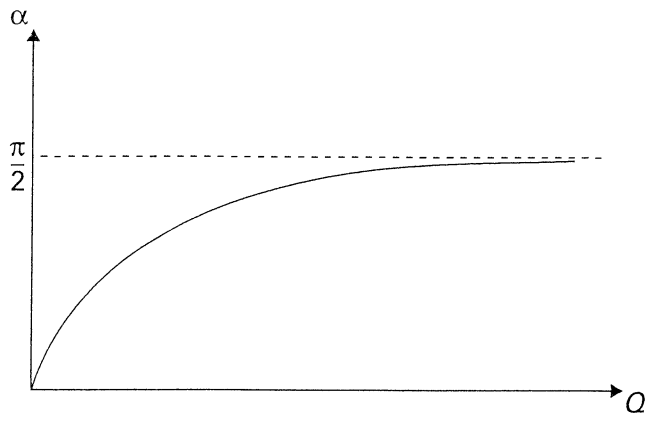
$\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ étant des fonctions croissantes de α ; α est une fonction croissante de Q.

Quand $Q \to \infty$, $\tan\infty \to \infty$ donc $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. La courbe $\alpha(Q)$ présente donc une asymptote. Quand α est petit $\sin^2\alpha\tan\alpha \approx \alpha^3$, donc :

$$\alpha \approx \left(\frac{1}{64\pi\varepsilon_0 l^2 mg}\right)^{1/3} \cdot Q^{2/3}$$

donc $\left(\frac{d\alpha}{dQ}\right)_{Q\to 0} \to \infty$. La courbe présente une tangente verticale.

La courbe $\alpha(Q)$ a donc l'allure suivante :



3 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

A – Définitions du champ électrostatique
1. Définition
2. Équation aux dimensions et unités
3. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle unique
4. Champ électrostatique créé par un système de charges ponctuelles discrètes
5. Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

B – Flux du champ électrostatique
6. Flux du champ électrostatique à travers une surface élémentaire
7. Flux du champ électrostatique à travers une surface finie non fermée
8. Flux du champ électrostatique à travers une surface fermée
9. Généralisation : Théorème de Gauss
10. Lignes de champ
11. Symétries, antisymétries et invariances du champ électrostatique

A - DÉFINITIONS DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

1 - DÉFINITION

On dit qu'en une région de l'espace existe un champ électrostatique si une charge électrique placée en un point de cette région est soumise à une force de nature électrostatique. Le mot « électrostatique » signifie que les charges sont immobiles par rapport au référentiel de l'observateur, conformément au Principe de Coulomb. On se placera toujours dans ce cas.

Soit une région de l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E}$ et un point M de cette région. Plaçons en M une charge q', nous supposerons que q' ne modifie pas $\vec{E}$. Elle est soumise à une force $\vec{f}'$. Remplaçons la charge q' par une charge q'' qui ne modifie pas $\vec{E}$, non plus. Celle-ci est soumise à une force $\vec{f}''$ de même support que $\vec{f}'$ et de même sens que f' si q' et q'' ont le même signe mais de sens opposé à celui de $\vec{f}'$ si q' et q'' sont de signes contraires. En remplaçant q'' par q''' ne modifiant pas $\vec{E}$, etc., on trouve de même :

$$\frac{\vec{f}'}{\vec{f}''} = \frac{q'}{q''} ; \frac{\vec{f}'}{\vec{f}'''} = \frac{q'}{q'''} ; \text{ etc.}$$

On peut donc écrire $\vec{f}' = q'\vec{E}$, $\vec{f}'' = q''\vec{E}$, etc.

On définira donc le champ électrostatique en M par le quotient $\frac{\vec{f}}{q}$ de la force $\vec{f}$ à laquelle est soumise une charge q placée en M, par la valeur de cette charge, à condition que l'introduction de la charge q ne modifie pas le champ préexistant.

2 - ÉQUATION AUX DIMENSIONS ET UNITÉS

On peut donc écrire en modules :

$$E = \frac{f}{|q|}$$

$|q|$ représentant la valeur absolue de la charge q. L'équation aux dimensions d'une force étant MLT^{-2} et celle d'une charge IT, celle de E sera :

$$\boxed{[E] = MLI^{-1}T^{-3}}$$

Dans le Système International, on peut prendre comme unité provisoire pour E le newton par coulomb : $\boldsymbol{N.C^{-1}}$.

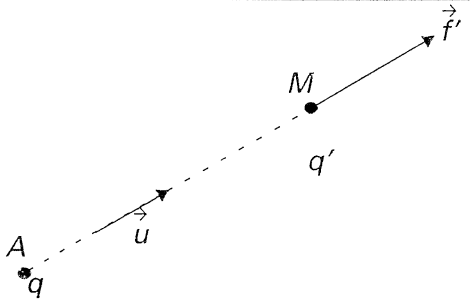
En fait, on verra au chapitre 4 que l'unité usuelle de champ électrostatique est le volt par mètre : $\boldsymbol{V.m^{-1}}$.

**** Remarque***

Si l'on fait $q = +1C$, on a numériquement $\vec{f} = \vec{E}$.

Le vecteur champ électrostatique en un point peut donc être déterminé numériquement par la force agissant sur une charge $+1C$ placée en ce point. Insistons sur le « numériquement », la relation $\vec{f} = \vec{E}$ n'étant pas homogène, seuls les directions, les sens et les modules de $\vec{f}'$ et $\vec{E}$ sont identiques mais pas les grandeurs physiques correspondantes.

3 - CHAMP ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE CHARGE PONCTUELLE UNIQUE



Soit une charge active q placée en A. On se propose de trouver le champ $\vec{E}$ qu'elle crée en un point M.

Plaçons en M une charge q'. Elle est soumise à une force :

$\vec{f'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2}\vec{u}$ (avec $r = AM$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM}$ unitaire de AM)

Comme, par définition, $\vec{E} = \frac{\vec{f'}}{q'}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\vec{u}}$$

Si $q > 0$, $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de même sens, le champ électrostatique « fuit » q.

Si $q < 0$, $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraire, le champ électrostatique est dirigé vers q.

4 - CHAMP ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UN SYSTÈME DE CHARGES PONCTUELLES DISCRÈTES

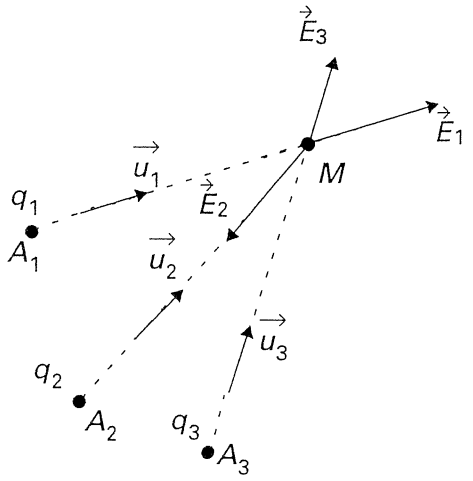
Pour chaque charge q_i, on peut écrire :

$$\vec{E_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}$$

avec :

$$r_i = A_iM, \ \vec{u_i} = \frac{\overrightarrow{A_iM}}{A_iM}$$

unitaire de la direction A_iM, $\vec{u_i}$ toujours dirigé de A_i vers M (sur le cas de la figure, q_1 et q_3 sont positives, q_2 est négative).



Le champ électrostatique résultant sera évidemment :

$\vec{E} = \sum_i \vec{E_i}$, d'où $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}}$

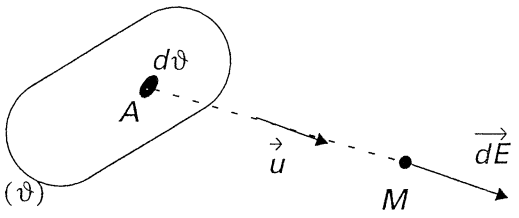
5 - CHAMP ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

1. Distribution volumique de charges

Soit un élément de volume $d\vartheta$ centré sur un point A où la densité de charge est ρ. Cet élément de volume porte la charge $dq = \rho\, d\vartheta$ assimilable à une charge ponctuelle.

Cette charge élémentaire crée donc en M un champ $\overrightarrow{dE}$ donné par l'expression du paragraphe 4 :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\, d\vartheta}{r^2} \vec{u}$$



(avec $r = AM$ et $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$).

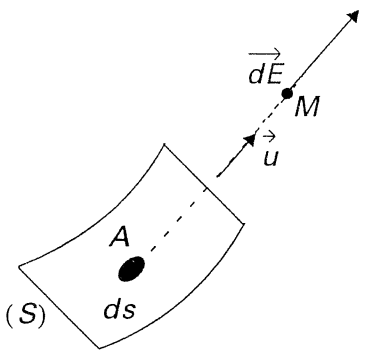
Le champ $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la distribution de charges sera :

$$\vec{E} = \iiint_{\vartheta} \overrightarrow{dE}$$

soit :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\vartheta} \frac{\rho\, d\vartheta}{r^2} \vec{u}}$$

2. Distribution surfacique de charges

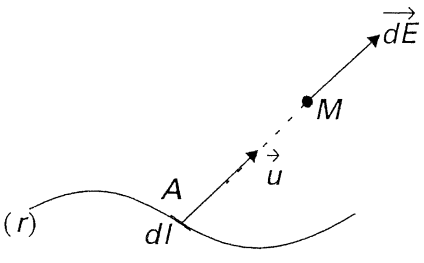


Un raisonnement analogue donne :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma\, ds}{r^2} \vec{u}$$

et : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{s} \dfrac{\sigma\, ds}{r^2} \vec{u}}$

3. Distribution linéique de charges



Un raisonnement analogue donne :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\, dl}{r^2} \vec{u}$$

et $\boxed{\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Gamma} \dfrac{\lambda\, dl}{r^2} \vec{u}}$

Attention.- les intégrales se calculent sur des vecteurs et non des modules.

4. Remarques

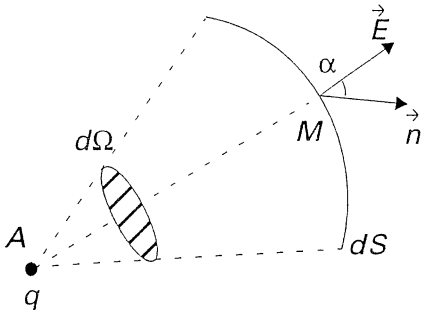
a – L'expression $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$ pour une charge ponctuelle unique q montre que si $r \to 0$, $E \to \infty$. Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle unique n'est donc pas défini au point où est placée la charge.

b – Dans les cas d'une distribution continue de charges en volume, quand $r \to 0$, $d\vartheta \to 0$ comme r^3, donc $\frac{\rho\, d\vartheta}{r^2} \to 0$ comme $\rho.r$ si ρ est fini. Donc, E est alors fini. Une charge ponctuelle doit donc être considérée comme une distribution volumique pour laquelle $\rho \to \infty$. Pour une distribution surfacique ou linéique, $E \to \infty$ quand $r \to 0$. Le champ n'est donc pas défini sur la surface ou la ligne chargées.

B - FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

6 - FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE À TRAVERS UNE SURFACE ÉLÉMENTAIRE

Soit une charge ponctuelle q placée en un point A. Soit un élément de surface dS de point moyen M. Soit $\vec{n}$ la normale à dS en M. Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique créé par la charge q en M. Le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers dS est, par définition :



$$d\phi = \vec{E}.\vec{n}.dS$$

$$d\phi = E.dS.\cos\alpha$$

Comme $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ avec $r = AM$, il vient :

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\,dS\,\cos\alpha}{r^2}$$

Or, $\frac{dS\,\cos\alpha}{r^2}$ est, par définition, l'angle solide $d\Omega$ sous lequel de A on voit dS

$$\boxed{d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega}$$

On convient d'algébriser $d\Omega$ de la manière suivante : on appelle *face nord* de dS la face par laquelle sort le vecteur normal $\vec{n}$, *face sud* l'autre face. $d\Omega$ est positif si de A on voit la face sud de dS, dans le cas contraire $d\Omega$ est négatif.

Dans le cas d'une surface finie fermée, on convient de prendre $\vec{n}$ orienté vers l'extérieur de la surface : on parle alors de *flux sortant.*

Unité : le flux de $\vec{E}$ s'exprime en $V.m$

7 - FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE À TRAVERS UNE SURFACE FINIE NON FERMÉE

Tous les vecteurs $\vec{u}$ étant orientés dans un sens donné, le flux total du vecteur champ électrostatique créé par une charge ponctuelle unique à travers une surface (S) non fermée sera :

$$\phi = \int\int_{(S)} d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\int_{(S)} d\Omega$$

Soit $\Omega = \int\int_{(S)} d\Omega$ l'angle solide sous lequel de A on voit la surface (S).

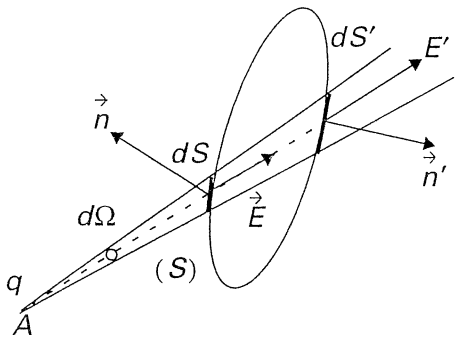
Alors :

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$$

On voit que le flux est le même pour différentes surfaces non fermées (S) vues sous le même angle solide Ω de A.

8 - FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE À TRAVERS UNE SURFACE FERMÉE

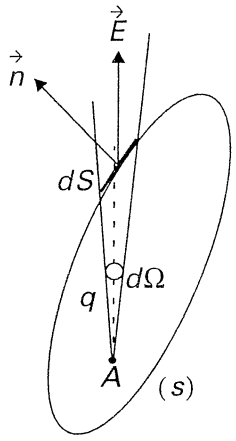
1. La charge ponctuelle est à l'exterieur de la surface fermée



Soit une surface fermée (S) sans singularité et soit un point A situé à l'extérieur de (S). En A, on place une charge ponctuelle q. Soit un cône élémentaire de sommet A délimitant un angle solide $d\Omega$. Celui-ci découpe sur (S) deux surfaces élémentaires dS et dS' de normales $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ orientées vers l'extérieur. Soient $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ les champs électrostatiques créés par q en dS et dS'.

Le flux $d\phi$ de $\vec{E}$ à travers dS est négatif et le flux $d\phi'$ de $\vec{E}'$ à travers dS' est positif, si l'on suppose q positive. Les signes sont inversés si q est négative. En valeurs absolues, ces flux sont égaux. Donc le flux total sortant de dS et dS' est $d\phi + d\phi' = 0$. Il en est de même pour tout autre angle solide élémentaire $d\Omega$. Donc, au total, le flux du vecteur champ électrostatique sortant de (S) est nul.

2. La charge ponctuelle est à l'intérieur de la surface fermée



Le flux du vecteur $\vec{E}$ sortant de dS est :

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

Pour (S), on aura donc :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\int_{(s)} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

Or, l'angle solide Ω sous lequel de A, intérieur à (S), on voit toute la surface S est 4π (stéradians).

$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi$, soit $\boxed{\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$

9 - GÉNÉRALISATION : THÉORÈME DE GAUSS

Considérons une distribution quelconque de charges ponctuelles ou non. Soit une surface fermée (S). On peut généraliser le résultat ci-dessus en considérant le champ électrostatique $\vec{E}_i$ créé par chacune des charges et le flux ϕ_i de ce champ sortant de la surface (S).

Pour les charges q_{ext} situées à l'extérieur de (S), on aura $\phi = 0$. Pour chacune des charges intérieures q_{int} on aura $\phi_{int} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$. D'où, au total :

$$\boxed{\phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

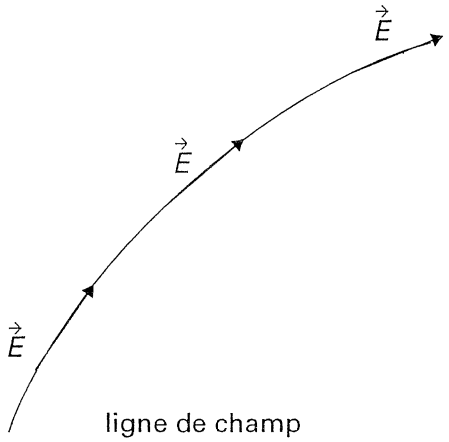
Théorème de Gauss : le flux du vecteur champ électrostatique sortant d'une surface fermée (S) est égal au quotient par ε_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de (S).

10 - LIGNES DE CHAMP

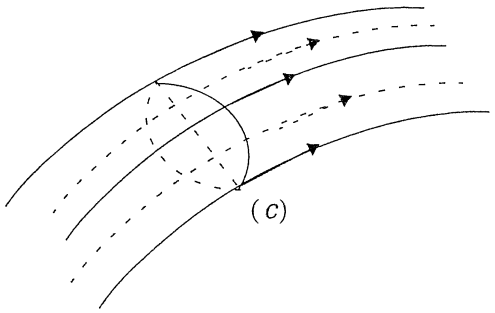
1. Définitions

* On appelle *ligne du champ électrostatique* toute courbe tangente en chacun de ses points au vecteur $\vec{E}$ en ce point. Une ligne de champ donnée est, en général, orientée par le sens de $\vec{E}$.

* On appelle *tube du champ électrostatique* l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.

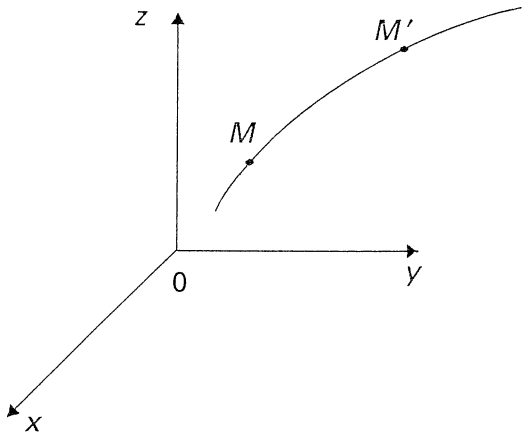


ligne de champ



tube de champ s'appuyant sur le contour fermé (*c*)

2. Équations des lignes de champ



* Soit une ligne de champ donnée. Soient deux points M et M' infiniment voisins situés sur cette ligne de champ. Si l'on rapporte l'espace à un repère cartésien $Oxyz$, $\vec{E}$ a pour composantes (E_x, E_y, E_z), $\overrightarrow{MM'}$ a pour composantes (dx, dy, dz). Par la définition même de la ligne de champ, $\vec{E}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\boxed{\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}}$$

* Dans la base cylindrique habituelle $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, soient $(E_r, E_\theta, E_\varphi)$ les composantes de $\vec{E}$. Les composantes du déplacement infiniment petit $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ sont $(dr, rd\theta, dz)$. La colinéarité se traduit par :

$$\boxed{\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}}$$

* Dans la base sphérique habituelle $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$, soient $(E_r, E_\theta, E_\varphi)$ les composantes de $\vec{E}$. Les composantes du déplacement infiniment petit $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ sont $(dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi)$. La colinéarité se traduit par :

$$\boxed{\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}}$$

* Les trois expressions encadrées ci-dessus constituent les *équations différentielles des lignes de champ*. Par intégration de celles-ci, on obtiendra les équations des lignes de champ. Comme, lors de l'intégration s'introduira une constante arbitraire d'intégration (ce sont des équations du premier ordre), on obtiendra ainsi les équations d'une famille de lignes de champ paramétrées par la constante.

**** Remarques***

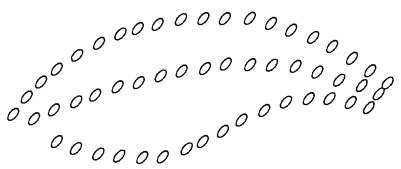
• On se rappellera que r et θ n'ont pas la même signification en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

• Les composantes de $\vec{E}$ $(E_x,..., E_\varphi)$ sont des composantes ***algébriques****. Pour déterminer les lignes de champ, il ne suffit donc pas de connaître le module du champ.*

3. Détermination des lignes de champ

Pour déterminer les lignes de champ d'une distribution donnée, on peut procéder de deux manières différentes.

a) Détermination expérimentale



On place un liquide isolant tel que de l'huile dans le champ étudié. Dans ce liquide on dispose des grains de sémoule ou de fécule. Ces grains, placés dans le champ, s'électrisent et constituent ainsi de minuscules dipôles. Ces dipôles s'orientent dans le champ dans lequel ils sont placés (voir chapitre 5) de manière à ce que la partie la plus longue du grain soit colinéaire au champ. On visualise ainsi les lignes de champ. On obtient un *spectre électrique.*

b) Simulation informatique

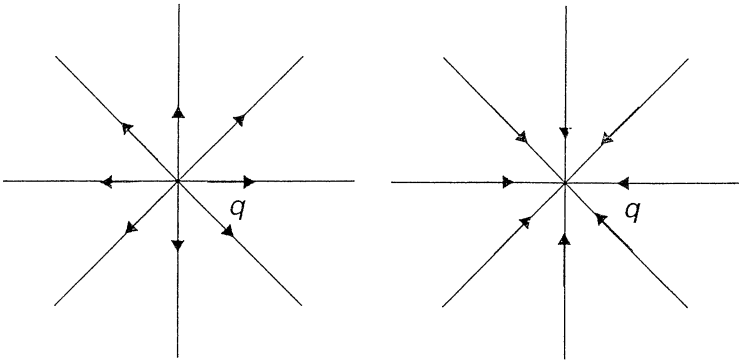
Lorsque la détermination expérimentale ci-dessus n'est pas possible pour des raisons pratiques, on peut déterminer les lignes de champ au moyen d'un ordinateur et d'un logiciel adapté, qui va simplement résoudre les équations différentielles des lignes de champ et en donner une représentation graphique. Le logiciel *Maple* réalise ceci très simplement. C'est celui-ci et le logiciel *Mathématica* qui ont été utilisés pour la plupart des courbes tracées dans cet ouvrage.

4. Topographie de quelques champs

On appelle topographie la représentation, pour une distribution donnée de charges, des lignes de champ obtenues comme il a été dit au paragraphe ci-dessus.

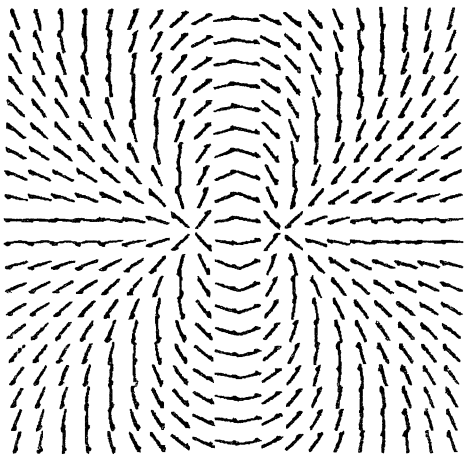
Voici quelques exemples de lignes de champ :

• champ créé par une charge « ponctuelle » unique

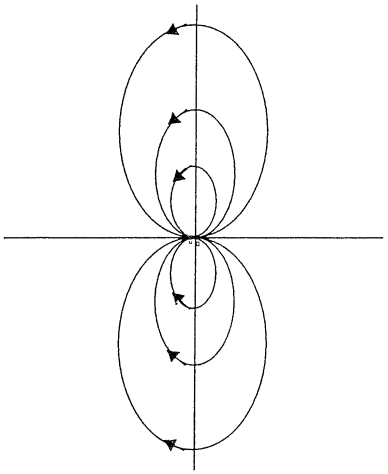


$q > 0$ $q < 0$

• champ créé par deux charges opposées

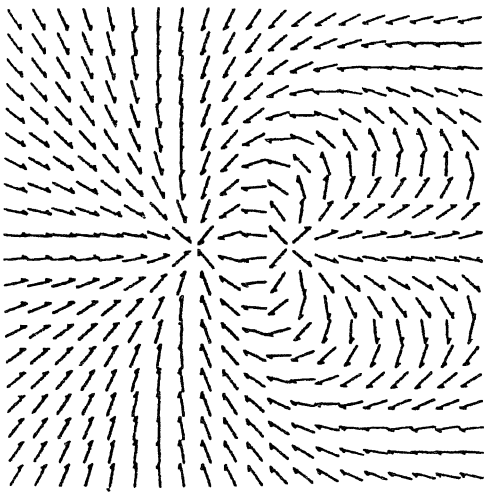


charges éloignées

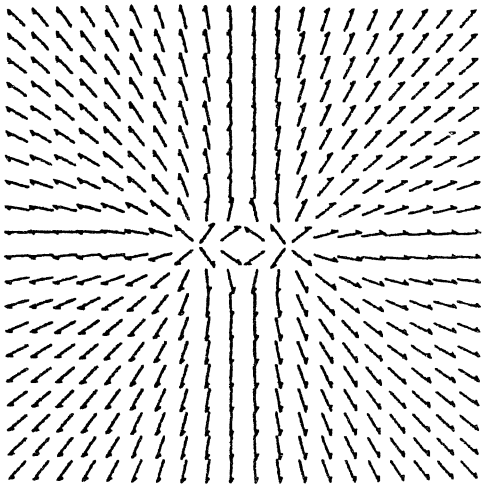


charges proches (modèle du dipôle)

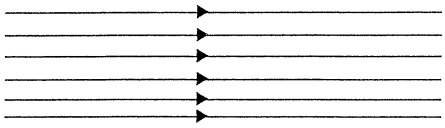
• champ créé par les charges $-2q$ et $+q$



• champ créé par deux charges positives identiques



• champ uniforme



5. Propriétés des lignes de champ

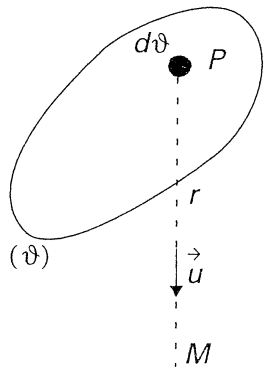
L'étude, tant expérimentale que théorique des lignes de champ montre que :

• une ligne de champ ne peut être fermée sur elle-même ;

• dans les régions sans charge, les lignes de champ se resserrent lorsque le module du champ augmente et inversement.

11 - SYMÉTRIES, ANTISYMÉTRIES ET INVARIANCES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

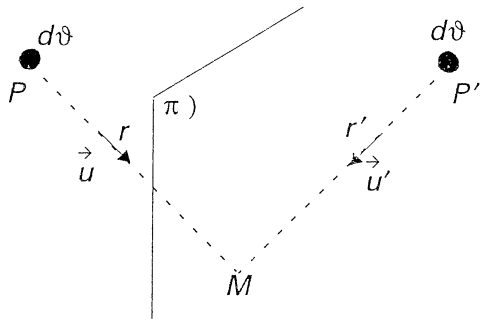
1. Symétries



Soit une distribution de charges dans un volume (ϑ) . Soit $\rho(P)$ la densité volumique de charges en un point de ce volume. En un point M de l'espace, un élément de volume $d\vartheta$ centré en P créé un champ :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)\,d\vartheta}{r^2}\vec{u}$$

Supposons que la distribution de charges présente un plan de symétrie (π) passant par M.



Cela signifie qu'à tout $d\vartheta$ centré en P, on peut associer un $d\vartheta$ identique centré en P' tel que les vecteurs $\frac{\rho(P)}{r^2}\vec{u}$ et $\frac{\rho(P')}{r'^2}\vec{u}'$

soient symétriques par rapport à (π) . Le champ total créé par la distribution sera :

$$\vec{E} = \iiint_{\vartheta}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)\,d\vartheta}{r^2}\vec{u}$$

La contribution à $\vec{E}$ des deux éléments de charges centrés en P et P' est

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)\,d\vartheta}{r^2}\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{dE'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P')\,d\vartheta}{r'^2}\vec{u}'$$

Ces deux champs sont symétriques par rapport à (π) de sorte que la somme $\overrightarrow{dE} + \overrightarrow{dE'}$ est portée par (π). Comme, à chaque $d\vartheta$ centré en P, on pourra associer un $d\vartheta$ centré en P', le champ total sera porté par (π).

Ainsi :

I si la distribution possède un plan de symétrie, $\vec{E}$ est contenu dans ce plan de symétrie en tout point de celui-ci.

**** Remarque***

Très souvent, les distributions de charges usuelles sont uniformes de sorte que $\rho(P) = \rho(P')$ quels que soient les points P et P' . Le plan de symétrie éventuel se réduit alors à un plan de symétrie géométrique.

▌ Si la distribution est uniforme et possède un plan de symétrie géométrique, $\vec{E}$ est contenu dans ce plan de symétrie en tout point de celui-ci.

La démonstration, ci-dessus, a été faite dans le cas d'une distribution volumique. On peut la reprendre telle quelle pour une distribution surfacique ou linéique ou même pour une distribution de charges ponctuelles discrètes.

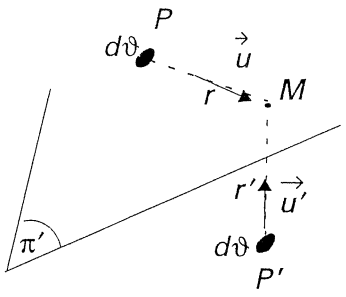
Supposons, maintenant, que la distribution possède deux plans de symétrie passant par *M*. Ces plans se coupent suivant un axe (Δ) qui est nécessairement un axe de symétrie. Le champ $\vec{E}$ devant appartenir à chacun des plans d'après ce qui précède, appartient à (Δ). Donc :

▌ si la distribution possède un axe de symétrie, $\vec{E}$ est porté par cet axe en tout point de celui-ci.

Enfin, si la distribution possède un centre de symétrie, celui-ci est l'intersection de deux ou plusieurs axes de symétrie. Le champ $\vec{E}$ devant être porté par chaque axe, il est nul au centre de symétrie.

▌ Si la distribution possède un centre de symétrie, $\vec{E}$ est nul en ce point.

2. Antisymétries



La distribution peut aussi, parfois, posséder des éléments d'antisymétries. Le plan (π') passant par *M* sera plan d'antisymétrie si les vecteurs $\frac{\rho(P)}{r^2}\vec{u}$ et $-\frac{\rho(P')}{r'^2}\vec{u'}$ sont symétriques par rapport à (π'). Les vecteurs $\frac{\rho(P)}{r^2}\vec{u}$ et $\frac{\rho(P')}{r'^2}\vec{u'}$ sont alors symétriques par rapport à la normale en *M* à (π'). Le vecteur résultant $\frac{\rho(P)}{r^2}\vec{u}$ et $\frac{\rho(P')}{r'^2}\vec{u'}$ est donc porté par cette normale. En associant deux à deux les vecteurs élémentaires, on en déduit que :

▌ si la distribution possède un plan d'antisymétrie, $\vec{E}$ est perpendiculaire à ce plan en tout point de celui-ci.

De même que précédemment :

▌ si la distribution possède un axe d'antisymétrie, $\vec{E}$ est perpendiculaire à cet axe en tout point de celui-ci.

**** Remarque***

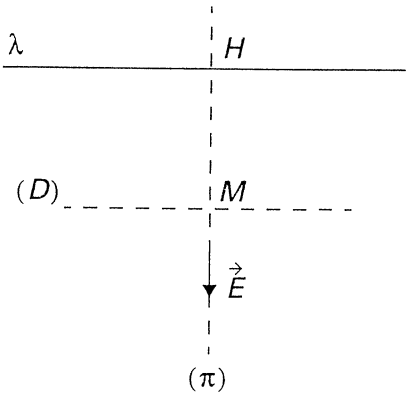
Les éléments de symétrie sont souvent dits éléments de symétrie positive, les éléments d'antisymétrie sont dits de symétrie négative.

3. Invariances

Le champ électrostatique $\vec{E}$ est invariant dans une région de l'espace si pour tous points M, M' de cette région :

$$E(M) = E(M')$$

Cette invariance éventuelle est liée à la présence d'éléments de symétrie.



Considérons, par exemple, un fil infiniment long portant une densité linéique de charges uniforme λ. Tout plan (π) perpendiculaire au fil est plan de symétrie puisqu'il y a autant de charges de part et d'autre. Le plan de figure est aussi plan de symétrie de sorte que $\vec{E}$ est porté par HM. Les différents points M' situés sur la droite (D) parallèle au fil, passant par M, sont tous placés de la même manière par rapport aux charges (encore une fois puisque le fil est infini) de sorte que $\vec{E}$ aura même module en tous les points M' de (D).

Ici, de plus, il se trouve que le vecteur $\vec{E}$ est le même, mais ce n'est pas une nécessité pour l'invariance.

Toujours sur le même exemple, si l'on considère l'ensemble des points M'' situés sur le cercle centré en H, de rayon HM, comme tous ces points sont placés de la même manière par rapport aux charges, $\vec{E}$ y a même module, mais cette fois-ci la direction du vecteur $\vec{E}$ change. Ainsi, en tout point M, $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$, r représentant la distance de M au fil et $\vec{u_r}$ étant l'unitaire radial de la perpendiculaire abaissée de M sur le fil.

EXERCICES-TYPES

01 - FLUX DU CHAMP TRAVERSANT UN TRIANGLE

On considère un repère orthonormé $Oxyz$. Soient les points A sur Ox ($\overline{OA} = a$), B sur Oy ($\overline{OB} = a$), C sur Oz ($\overline{OC} = a$). Au point O on place une charge ponctuelle q. Calculer le flux du champ électrostatique traversant la surface délimitée par A, B, C.

02 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE

Soit une sphère de rayon R portant une densité surfacique σ uniforme. Calculer le champ $\vec{E}$ créé en un point quelconque situé à l'intérieur de la sphère sans utiliser le théorème de Gauss.

03 - CARACTÈRE NEWTONIEN DU CHAMP

Montrer que si le champ à l'intérieur d'une sphère de rayon R portant une densité surfacique σ uniforme est nul, le champ est newtonien, c'est-à-dire de la forme $E = \frac{k}{r^2}$.

04 - CHAMP CRÉÉ PAR UN PLAN UNIFORMÉMENT CHARGÉ

Calculer directement (sans utiliser le théorème de Gauss) le champ créé par un plan uniformément chargé en surface d'une densité σ.

05 - CHAMP CRÉÉ PAR UN DISQUE

Soit un disque de rayon R d'épaisseur négligeable portant une densité surfacique de charges σ constante.

Calculer le champ électrostatique créé en un point de l'axe du disque.

Retrouver le résultat de l'exercice 4.

06 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE COURONNE CIRCULAIRE

On considère une couronne circulaire de centre O, de rayons R et R' ($R < R'$). Cette couronne porte une densité surfacique de charges uniforme σ. On considère un point M situé sur l'axe de la couronne à une distance x de O.

Déterminer le champ électrostatique en M.

Examiner les cas particuliers intéressants.

07 - CHAMP CRÉÉ PAR UN CARRÉ

On considère un carré de côtés $2a$, de centre O. Une charge totale Q est uniformément répartie sur ce carré. Calculer le champ électrostatique créé en un point M situé sur l'axe du carré à une distance a de O.

08 - CHAMP CRÉÉ PAR UN RUBAN

Un ruban de longueur infinie, de largeur $2d$ porte une densité surfacique de charges uniforme σ. Calculer le champ électrostatique créé en un point M situé à équidistance des deux bords du ruban et à une distance a de celui-ci.

09 - CHAMP CRÉÉ PAR UN ARC DE CERCLE

Calculer le champ électrostatique créé en son centre par un arc de cercle de rayon R vu du centre sous un angle 2α portant une densité linéique de charges λ constante.

10 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE LIGNE INFINIE

Calculer directement (sans utiliser le théorème de Gauss) le champ électrostatique créé en un point par une ligne infinie portant une densité linéique de charges λ constante.

11 - CHAMP CRÉÉ PAR DEUX DEMI-LIGNES

On considère deux demi-droites mises bout à bout formant une droite unique. L'une des demi-droites porte une densité linéique de charges $+\lambda$ constante, l'autre une densité $-\lambda$.

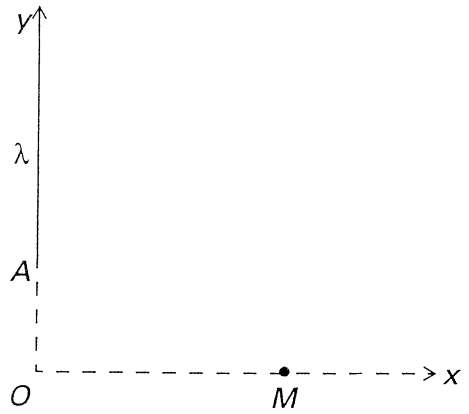
Déterminer le champ électrostatique en un point quelconque M. Montrer que si O est le point de raccord des deux demi-droites, le champ est perpendiculaire à *OM* quel que soit *M*.

12 - CHAMP CRÉÉ PAR DEUX DEMI-DROITES

Soient deux demi-droites concourantes en *O* portant des densités linéiques de charges $+\lambda$ et $-\lambda$ constantes faisant entre elles un angle 2φ. Soit une point *M* situé sur la bissectrice intérieure de l'angle à une distance $OM = x$ de *O*.

Déterminer le champ électrostatique en *M*.

13 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE DEMI-DROITE

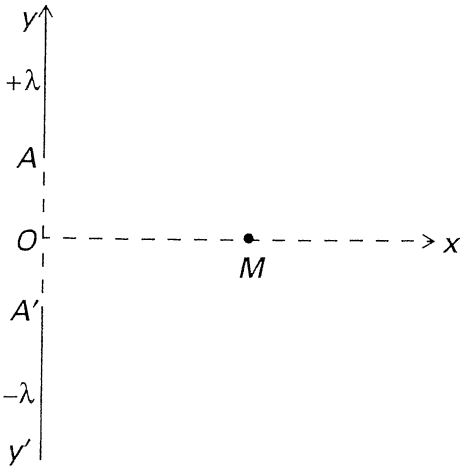


La demi-droite *Ay* porte une densité linéique de charges uniforme λ.

Déterminer le champ électrostatique en *M*.

$\overline{OA} = a$, $\overline{OM} = x$

14 - CHAMP CRÉÉ PAR DEUX DEMI-DROITES.



La demi-droite Ay porte une densité linéique de charges uniforme $+\lambda$, la demi-droite *y'*A' porte une densité linéique de charges uniforme $-\lambda$.

Déterminer le champ électrostatique en *M*.

$\overline{OA} = a$, $\overline{OA'}$=-a, $\overline{OM} = X$

15 - CHAMP CRÉÉ PAR UN SEGMENT

Déterminer le champ électrostatique créé en un point quelconque par un segment de longueur *2c* portant une densité linéique de charges λ constante.

16 - FLUX DU CHAMP DANS UNE RÉGION SANS CHARGE

Montrer que dans une région sans charge, le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est nul.

17 - TOPOGRAPHIE DU CHAMP

Montrer que dans une région sans charge, les lignes de champs se resserrent lorsque le module du champ augmente.

18 - DISCONTINUITÉ DU CHAMP

Soit une surface chargée (Σ).

Montrer que, à la traversée de (Σ), la composante $\vec{E}$ normale à (Σ) subit une discontinuité.

19 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN SURFACE

Soit une sphère de rayon *R* portant une densité surfacique de charges σ constante.

Calculer le champ électrostatique créé en tout point.

20 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN VOLUME

On considère une sphère de centre *O* de rayon *R* portant une densité volumique de charges ρ constante.

Déterminer le champ créé en tout point.

21 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

On considère une distribution de charges à symétrie sphérique centrée en O telle qu'à une distance x de O, $\rho = \rho_0 e^{-kx}$; ρ_0 étant une constante.

Calculer le champ électrostatique en tout point.

22 - CHAMP CRÉÉ PAR UNE LIGNE UNIFORMÉMENT CHARGÉE

Reprendre l'exercice 10 en appliquant le théorème de Gauss.

23 - CHAMP CRÉÉ PAR UN CYLINDRE UNIFORMÉMENT CHARGÉ EN SURFACE

Soit un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité surfacique de charges σ constante.

Déterminer le champ électrostatique en tout point.

24 - CHAMP CRÉÉ PAR UN CYLINDRE UNIFORMÉMENT CHARGÉ EN VOLUME

Calculer le champ créé en tout point par un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité volumique de charges ρ constante.

25 - MOUVEMENT D'UNE CHARGE PONCTUELLE DANS LE CHAMP D'UN ANNEAU.

Un anneau de centre O, de rayon R, porte une charge $Q > 0$ uniformément répartie.

Une charge ponctuelle $q < 0$ est mobile sans frottement sur l'axe Ox de l'anneau. Montrer que cette charge est animée d'un mouvement sinusoïdal lorsqu'on l'abandonne à elle-même après l'avoir écartée légèrement de O (on notera m la masse de la charge ponctuelle et on négligera son poids comme d'habitude).

A.N $Q = 10^{-8}$C, $q = -10^{-10}$C, $m = 10^{-6}$ kg, $R = 10$cm.

INDICATIONS

01 - Déterminer de manière simple l'angle solide sous lequel de O on voit une face.

02 – 03 - Associer deux éléments de surface opposés vus du point sous le même angle solide.

04 À 14 - Déterminer la direction du champ résultant en utilisant les éventuelles symétries ou antisymétries. Écrire le champ créé par un élément de surface, projeter sur la direction du champ résultant et intégrer.

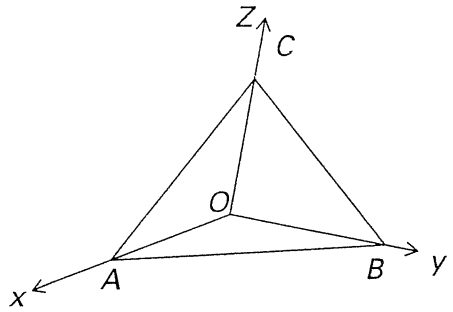
15 - On aura à utiliser le résultat de l'exercice 9.

16 À 24 - Utiliser le théorème de Gauss et l'appliquer à une surface convenable.

25 - Calculer d'abord le champ créé par la circonférence en un point de son axe et appliquer ensuite la relation fondamentale de la dynamique.

SOLUTIONS

01 -



On peut compléter le tétraèdre *OABC* par 7 tétraèdres identiques accolés de manière à former un octaèdre régulier de centre *O*.

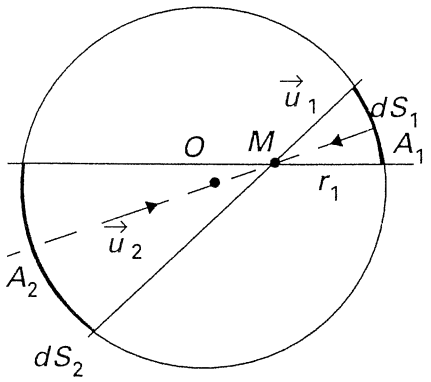
L'angle solide sous lequel de *O* on voit une face telle que *ABC* est donc $\Omega = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} sr$

le flux $\vec{E}$ à travers un élément de surface dS est

$$d\phi = \frac{9}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

donc $\phi = \frac{9}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\pi}{2}$ $\qquad \boxed{\phi = \frac{9}{8\varepsilon_0}}$

02 -



Soit un point *M* situé à l'intérieur de la sphère. Soit le diamètre *MO*. Considérons les deux cônes de même angle solide $d\Omega$ de sommet *M*. Ils découpent sur la surface de la sphère deux éléments de surface dS_1 et dS_2.

Le champ $\overrightarrow{dE_1}$ créé par la charge σdS_1 portée par dS_1 est :

$$\overrightarrow{dE_1} = \frac{1}{4\pi E_0} \cdot \frac{\sigma dS_1}{r_1^2} \vec{u}_1$$

avec $r_1 = A_1M$ et $\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{A_1M}}{A_1M}$.

Le champ $\vec{dE_2}$ créé par la charge σdS_2 portée par dS_2 est :

$$\overrightarrow{dE_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma dS_2}{r_2^2} \vec{u}_2.$$

Or $\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega$ et $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$

$$\overrightarrow{dE_1} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma d\Omega \vec{u}_2 \text{ et } \overrightarrow{dE_2} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma d\Omega \vec{u}_2$$

Le champ total créé par dS_1 et dS_2 est donc :

$$\vec{dE} = \vec{dE_1} + \vec{dE_2} = 0$$

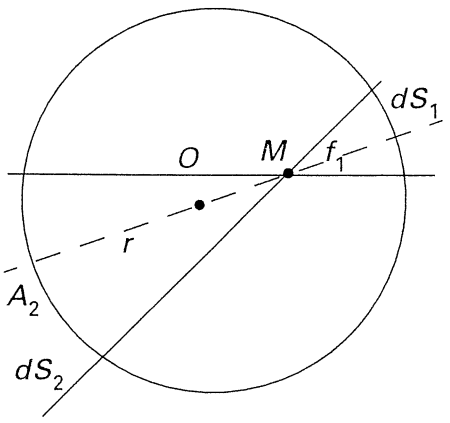
De même pour tous les autres angles solides élémentaires. Donc :

pour un point intérieur, $\vec{E} = 0$

03 - Cet exercice constitue en quelque sorte la réciproque du précédent. Prenons E sous la forme :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{f(r)}{r^2}$$

On se propose de montrer que $f(r)$ est une constante. Supposons, ce qui physiquement est parfaitement justifié, que $f(r)$ soit monotone sur un intervalle r_1, r_2. On reprend les notations de l'exercice précédent. Le champ $\overrightarrow{dE_1}$ créé par dS_1 a pour module :



$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sigma dS_1 \frac{\rho(r_1)}{r_1^2}$$

Le champ $\overrightarrow{dE_2}$ créé par dS_2 a pour module

$$dE_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sigma dS_2 \frac{f(r_2)}{r_2^2}$$

Or, $$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega.$$

Comme $\overrightarrow{dE_1} + \overrightarrow{dE_2} = 0$ (le champ total est nul),

$$\frac{dS_1 \cdot f(r_1)}{r_1^2} = \frac{dS_2 \cdot f(r_2)}{r_2^2}$$

$$d\Omega \cdot f(r_1) = d\Omega \cdot f(r_2)$$

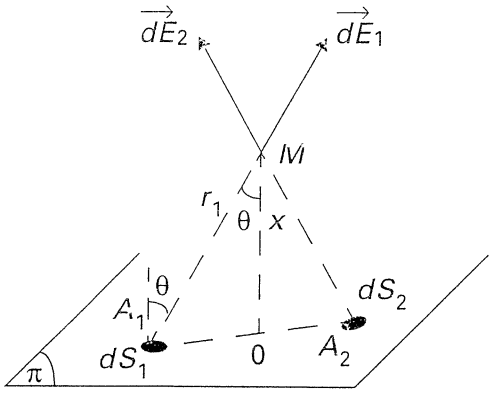
$$f(r_1) = f(r_2)$$

Comme $f(r)$ est monotone, il s'en suit :

$$f(r) = cte$$

Donc E est de la forme $\frac{k}{r^2}$

04 -



Soit un élément de surface dS_1 de point moyen A_1. Cet élément de surface porte une charge

$$dq_1 = \sigma dS_1.$$

Le champ $\overrightarrow{dE_1}$ créé par dq_1 a pour module :

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS_1}{r_1^{\,2}}.$$

Considérons l'élément dS_2 symétrique de dS_1 par rapport à O pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le plan (π). Cet élément crée un champ $\overrightarrow{dE_2}$ symétrique de $\overrightarrow{dE_1}$ par rapport à OM. La composition de $\overrightarrow{dE_1}$ et $\overrightarrow{dE_2}$ est un vecteur $\overrightarrow{dE}$ porté par OM. Le champ résultant créé par l'ensemble du plan sera donc porté par OM puisqu'à chaque élément dS_1 on peut associer son symétrique par rapport à O dS_2. On peut aussi dire que tout plan perpendiculaire à (π) contenant M est plan de symétrie, donc contient le champ résultant $\vec{E}$: $\vec{E}$ et donc porté par OM.

On a $$dE = 2 \cdot dE_1 \cos\theta = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma dS_1 \cos\theta}{r_1^{\,2}}.$$

Or, $$\frac{dS_1 \cos\theta}{r_1^{\,2}} = d\Omega$$ angle sous lequel de M, on voit dS_1.

Le champ résultant sera donc :

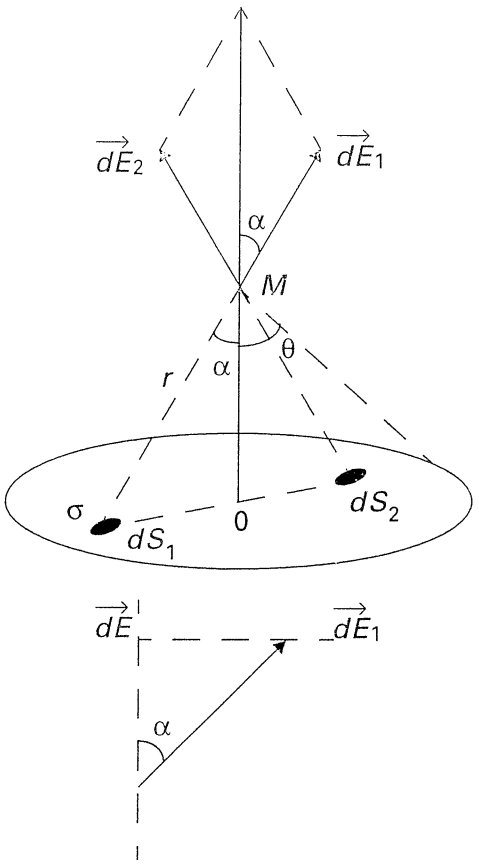
$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sigma\Omega$$

où Ω est l'angle solide sous lequel de M on voit le 1/2 plan (puisqu'à chaque dS_1 on a associé le symétrique dS_2). Comme $\Omega = \pi$, il vient donc :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

On remarque que ce champ est indépendant de la position de M.

05 -



Soit $OM = x$, la distance du centre du disque au point considéré. Soit un élément du surface dS_1 du disque. Cet élément de surface porte une charge $dq_1 = \sigma dS_1$ créant en M un champ $\overrightarrow{dE_1}$. Tout plan perpendiculaire au disque et contenant M est plan de symétrie pour la distribution et contient donc le champ résultant $\vec{E}$.

Donc le champ électrostatique résultant est porté par l'axe. il s'enfuit si σ est positive et il est dirigé vers le disque si σ est négative.

Soit dE la projection de $\overrightarrow{dE_1}$ sur l'axe. On a :

$$dE = dE_1 \cos\alpha$$

avec $$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma dS_1}{r^2}$$

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dS_1 \cos\alpha}{r^2}$$

Or, $\dfrac{dS_1 \cos\alpha}{r^2}$ est l'angle solide élémentaire sous lequel de M on voit dS_1.

Donc : $$dE = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Le champ total est :

$$E = \int_{\text{disque}} dE = \int_{\text{disque}} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{disque}} d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \Omega$$

Ω étant l'angle solide sous lequel de M on voit le disque. Si θ est le demi-angle au sommet du cône sous lequel de M on voit le disque, on sait que :

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (1 - \cos\theta)}$$

Comme $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)}$$

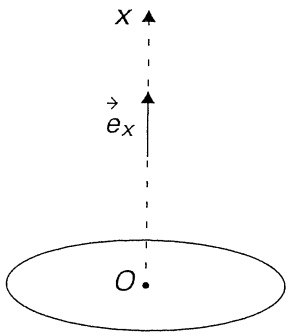
Si l'on fait tendre R vers l'infini, le disque tend vers un plan infini et

$$E \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

On retrouve le résultat de l'exercice 4.

06 - Le champ créé par un disque de rayon r uniformément chargé en surface avec la densité σ est :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\vec{u_x}$$



On peut considérer que la couronne circulaire est la superposition d'un disque de rayon R' portant $+\sigma$ et d'un disque de rayon R portant $-\sigma$:

$$\vec{E} = \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R'^2}}\right) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right]\vec{u_x}$$

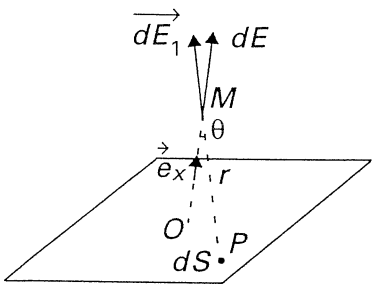
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R'^2}}\right)\vec{u_x}}$$

Cas particuliers

* $R \to O$, R' fini $\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R'^2}}\right)\vec{u_x}$, on retrouve bien sûr le cas du disque.

* $R \to O$, $R' \to \infty$ $\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$, on retrouve bien le cas du plan.

07 -



Par raison de symétrie, $\vec{E}$ en M est colinéaire à $\vec{OM}$.

Soit $\vec{dE_1}$ le champ élémentaire créé par une élément de surface dS.

$$dE_1 = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r = PM)$$

La composante utile de $\vec{dE_1}$ est $\vec{dE}$

$$dE = dE_1 \cos\theta$$

$$dE = \frac{\sigma dS \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Or, $\frac{dS\cos\theta}{r^2} = d\Omega$ angle solide sous lequel de M on voit dS.

Le champ total est donc,

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

Ω étant l'angle solide sous lequel de M on voit le carré.

Or, M est le centre d'un cube d'arête $2a$. Donc :

$$\Omega = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} sr$$

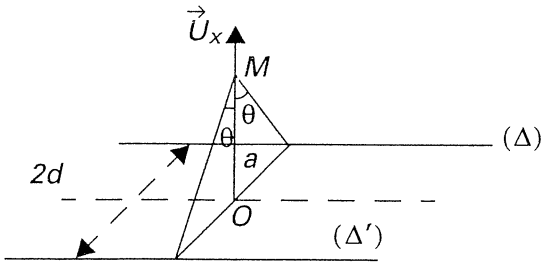
$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{3}$$

$$E = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$$

Vectoriellement :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}\vec{u_x}}$$

08 -



Le plan défini par (Δ) et M est un plan de symétrie.

Le plan défini par (Δ') et M est un plan de symétrie.

Donc $\vec{E}$ appartient à OM.

Soit Ω l'angle solide sous lequel de M on voit le ruban.

On sait que $E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$ (voir exercice 5, par exemple)

Cet angle solide est, par définition, égal à l'aire découpée sur la sphère de centre M et de rayon unité par le dièdre défini par M, (Δ) et (Δ').

$$\text{Donc : } \Omega = 4\pi \cdot \frac{2\theta}{2\pi} = 4\theta$$

$$\text{Or, } \theta = \arctan\frac{d}{a}$$

$$\text{d'où : } E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} 4 \arctan\frac{d}{a}$$

ou vectoriellement $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \text{ arc tan}\frac{d}{a}\vec{u}_x}$

Commentaires

* Si $d \to \infty$ on doit retrouver le cas du plan uniformément chargé. Or, si $d \to \infty$ $\frac{d}{a} \to \infty$ arc tan$\frac{d}{a} \to \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E} \to \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\pi}{2}\vec{u}_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

On retrouve bien le cas du plan uniformément chargé.

* Si $d << a$ on doit retrouver le cas de la ligne uniformément chargée. Or, si $d << a$, arc tan$\frac{d}{a} \approx \frac{d}{a}$ donc : $\vec{E} \sim \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{a}\vec{u}_x$

Soit λ la densité linéique de charges de la ligne équivalente :

$$\lambda = \sigma.2d, \text{ d'où :}$$

$$\vec{E} \sim \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{d}{a}\vec{u}_x$$

$$\vec{E} \sim \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{u}_x$$

On retrouve bien le cas de la ligne uniformément chargée (voir ci-après à l'exercice 10 le calcul direct).

09 - Un élément de longueur dl de l'arc chargé portant une charge $dq = \lambda dl$ crée en O un champ $d\vec{E}$ de module :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}$$

La bissectrice de l'angle est axe de symétrie pour la distribution : le champ résultant est donc porté par cette bissectrice.

Soit dE_1 la composante intéressante de dE (projection de $\vec{dE}$ sur la bissectrice) :

$$dE_1 = dE\cos\theta$$

Soit $$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}\cos\theta$$

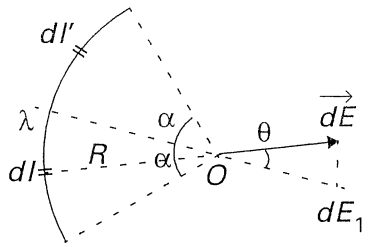
Or, $$dl = Rd\theta$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

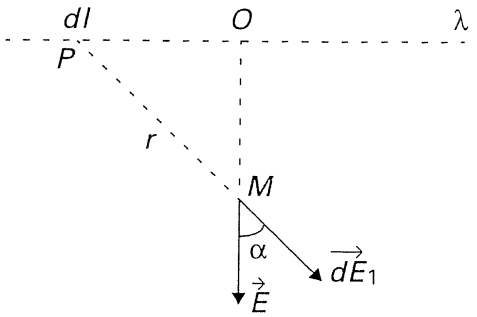
Le champ total $\vec{E}$ a donc pour module :

$$E = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dE_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta \, d\theta$$

d'où $$\boxed{E = \frac{\lambda \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$



10 -



Posons $OM = x$

Par raison du symétrie (par un raisonnement identique à ceux des exercices précédents), on voit que le champ total est perpendiculaire à la ligne chargée.

Un élément de longueur dl portant une charge élémentaire $dq = \lambda dl$ crée en M un champ $\overrightarrow{dE_1}$ de module :

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2}$$

La composante intéressante de $\overrightarrow{dE_1}$ est dE projection de $\overrightarrow{dE_1}$ sur OM :

$$dE = \overrightarrow{dE_1}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha .$$

Soit P le centre de l'élément dl. Posons $OP = l$. On a :

$$\frac{l}{x} = \tan\alpha \text{ et } dl = \frac{x}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

De plus :

$$r = \frac{x}{\cos\alpha}$$

d'où en reportant dans dE :

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\cos^2\alpha} d\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{x^2} \cos\alpha$$

Soit : $$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \cos\alpha \, d\alpha$$

Le champ total E sera :

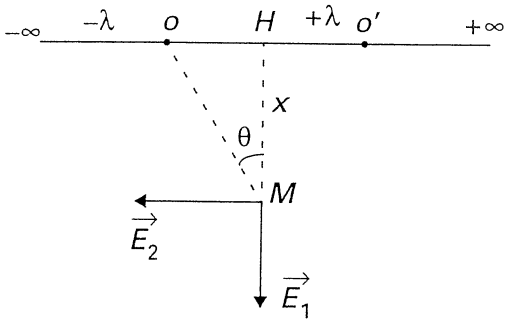
$$E = \int_{\text{ligne}} dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \int_{\text{ligne}} \cos\alpha \, d\alpha$$

Pour décrire toute la ligne il faudra faire varier α de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, d\alpha = [\sin\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2$$

Donc : $$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$$

11 -



Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la droite et O' le symétrique de O par rapport à H. On posera $HM = x$.

Le champ $\vec{E}$ en M peut être considéré comme la somme de deux champs :

- $\vec{E}_1$ créé par OO' ;

- $\vec{E}_2$ créé par la demi-droite $-\infty$, O et la demi-droite O', $+\infty$.

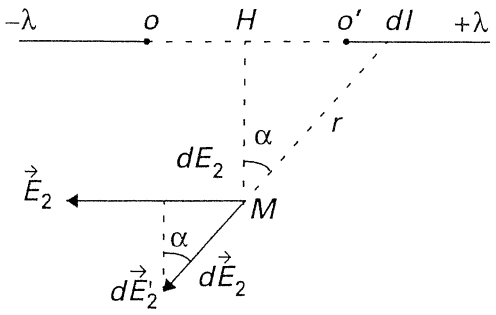
On vérifiera que $\vec{E}_1$ est perpendiculaire à la droite et $\vec{E}_2$ est parallèle à celle-ci, les sens étant ceux de la figure ci-dessus si M est placé du côté de la demi-droite $+\lambda$, les sens étant inversés dans le cas contraire.

– Un calcul identique à celui de l'exercice 10 donne :

$$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\theta}^{+\theta}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}[\sin\alpha]_{-\theta}^{+\theta}$$

donc $$E_1 = \frac{\lambda\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

– Calculons maintenant E_2.



Un élément de longueur dl portant $dq = \lambda dl$ crée en M un champ $\overrightarrow{dE'_2}$ de module :

$$dE'_2 = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La composante intéressante de dE'_2 est dE_2 :

$$dE_2 = dE'_2 \sin\alpha$$

Comme à l'exercice 10 :

$$dl = \frac{x}{\cos^2\alpha}dx \text{ et } r = \frac{x}{\cos\alpha}$$

donc : $$dE_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{x^2}\sin\alpha$$

ou $$dE_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha\, d\alpha$$

Pour la demi-droite O', $+\infty$, on a donc :

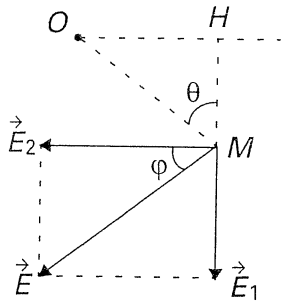
$$E'_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\, d\alpha$$

Or, $$\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\, d\alpha = [-\cos\alpha]_{\theta}^{\pi/2} = \cos\theta$$

$$E'_2 = \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

Il en sera de même pour la demi-droite $-\infty$, O. Le champ total E_2 est donc : $E_2 = 2E'_2$

soit $E_2 = \dfrac{\lambda \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 x}$



Le champ total E a pour module :

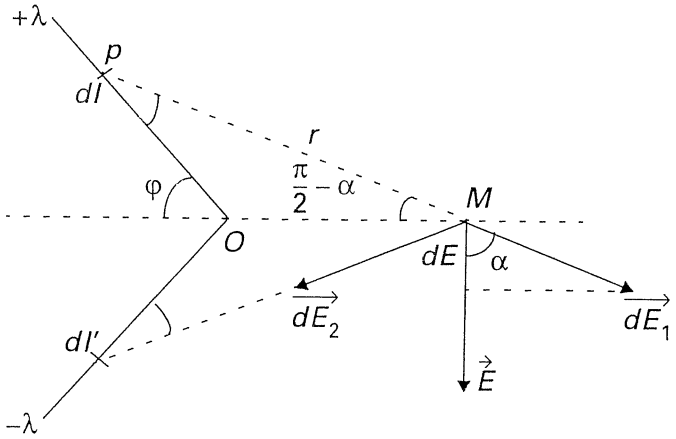
$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Soit $\boxed{E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$

De plus $\tan\varphi = \dfrac{E_1}{E_2} = \tan\theta$. Donc $\varphi = \theta$. On voit ainsi que $\vec{E}$ est perpendiculaire à OM.

12 - Soit un élément de longueur dl de la demi-droite portant $+\lambda$ et l'élément identique de l'autre demi-droite situé à la même distance de O.

Les deux champs $\overrightarrow{dE_1}$ et $\overrightarrow{dE_2}$ créés par les éléments de charges correspondants ont même module de sorte que la résultante sera portée par la perpendiculaire en M à la bissectrice orientée comme sur la figure ci-dessous



On peut aussi dire que le plan de figure est plan de symétrie : il contient donc le champ résultant $\vec{E}$. Le plan perpendiculaire au plan de figure contenant O et M est plan d'antisymétrie : $\vec{E}$ est perpendiculaire à ce plan. Donc $\vec{E}$ est contenu dans le plan de figure et est perpendiculaire à OM.

La composante intéressante de $\overrightarrow{dE_1}$ sera :

$$dE = dE_1 \cos\alpha$$

Or, $dE_1 = \dfrac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Calculons dE_1.

Posons $OP = l$. Dans le triangle OPM, on a :

$$\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{r}{\sin(\pi - \alpha)}, \text{ soit } \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{r}{\sin\varphi}$$

D'autre part :

$$l\cos\varphi + x = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Soit : $$l\cos\varphi + x = r\sin\alpha$$

donc $$l\cos\varphi + x = \frac{l\sin\varphi}{\cos\alpha}\sin\alpha$$

ou $$l\left[\cos\varphi - \frac{\sin\varphi\sin\alpha}{\cos\alpha}\right] = -x$$

Soit enfin

$$l = -x\frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi + \alpha)}$$

On en déduit :

$$dl = -x\,\frac{-\sin\alpha\cos(\varphi+\alpha) + \cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)}{\cos^2(\varphi+\alpha)}\,d\alpha$$

Soit : $$dl = \frac{-x\sin\varphi}{\cos^2(\varphi+\alpha)}\,d\alpha$$

D'autre part :

$$r = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha}l = -\frac{x\sin\varphi}{\cos(\varphi+\alpha)}$$

$$dE_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{x\sin\varphi}{\cos^2(\varphi+\alpha)}\,d\alpha\right)\frac{\cos^2(\varphi+\alpha)}{x^2\sin^2\varphi}$$

Il reste

$$dE_1 = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x\sin\varphi}\,d\alpha$$

Par suite

$$dE = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x\sin\varphi}\cos\alpha\,d\alpha$$

Le champ total s'obtiendra en intégrant sur α pour α variant de $\frac{\pi}{2}$ à O et en multipliant par 2 pour tenir compte des deux demi-droites :

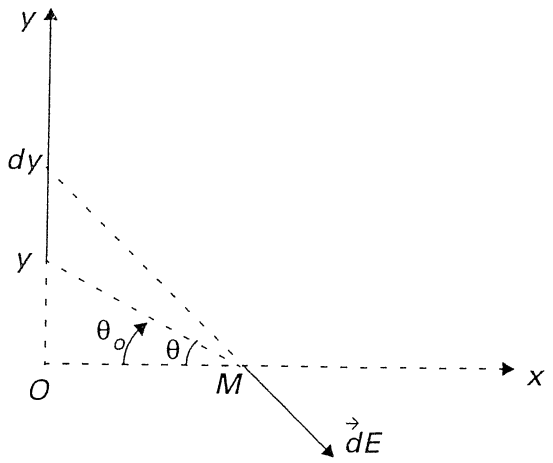
$$E = 2\left(-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x\sin\varphi}\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\alpha\,d\alpha$$

Or, $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\alpha\,d\alpha = [\sin\alpha]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -1$$

donc $$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x\sin\varphi}}$$

Remarque : Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on retrouve bien le résultat de l'exercice 11.

13 -



Le seul élément de symétrie est le plan de figure : $\vec{E}$ est contenu dans celui-ci et possède donc, *a priori*, deux composantes E_x et E_y.

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)}\vec{u}$$

$$dE_x = \frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)}\cos\theta$$

$$dE_y = -\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)}\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overrightarrow{dE}\begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda x dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \\ dE_y = -\dfrac{\lambda y dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

* $E_x = \int dE_x$. On paramètre par θ

$$y = x_0\tan\theta \quad dy = \frac{x d\theta}{\cos^2\theta} \quad dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{x}d\theta}{\cancel{\cos^2}\theta}\frac{\cancel{\cos^2}\theta}{\cancel{x^2}}\cos\theta$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\cos\theta}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}[\sin\theta]_{\theta_0}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(1-\sin\theta_0)$$

Or,

$$\sin\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)}$$

* $E_y = \int dE_y$ $\quad \dfrac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}d\left[\dfrac{(x^2+y^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]$

$$= -d(x^2+y^2)^{-1/2}$$

$$E_y = \left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\right]_a^{\infty}$$

$$\boxed{E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}}$$

14 - On procède comme à l'exercice précédent

La demi-droite $+\lambda$ crée un champ :

$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\vec{u}_x - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u}_y$$

La demi-droite $-\lambda$ crée un champ :

$$\vec{E}_- = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\vec{u}_x - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u}_y$$

Le champ total est $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

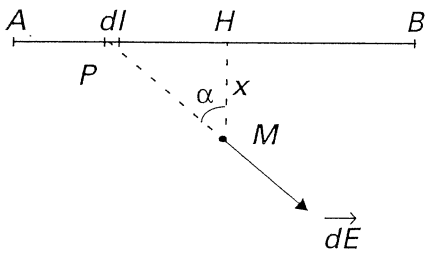
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u}_y}$$

15 - Soit un élément de longueur dl portant une charge $dq = \lambda dl$ créant en M un champ $\vec{dE}$ de module :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

Soit x la distance de M au segment. On a

$$r = \frac{x}{\cos\alpha}$$



et si l'on pose

$$l = HP = x\tan\alpha$$

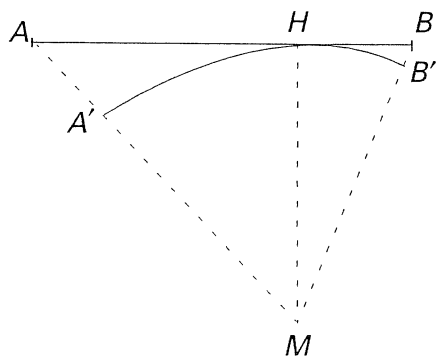
$$dl = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

d'où

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$$

$$dE = \frac{\lambda x d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

Or (voir exercice 9), dE n'est autre que le champ créé par un arc de cercle de rayon x vu du centre sous un angle $d\alpha$.

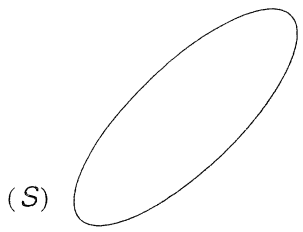


Le champ total en M sera donc le même que celui créé en M par un arc de cercle de centre M de rayon x : $A'B'$ vu de M sous un angle $2\alpha = \widehat{A'MB'}$.

Le champ résultant est donc porté par la bissectrice de l'angle $\widehat{A'MB'}$, c'est-à-dire de l'angle $\widehat{AMB}$ et a pour module

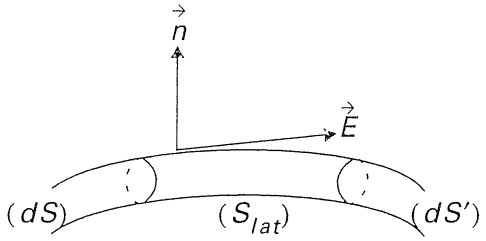
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha}$$

16 -



Soit une surface (S) fermée prise dans une région sans charge. Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique en un point de cette région. D'après le théorème de Gauss, le flux de $\vec{E}$ sortant de (S) est $\boxed{\phi_s(\vec{E}) = 0}$ d'où le résultat cherché.

17 -



Soit un tube de champ s'appuyant sur une surface (dS) et une surface (dS'). Soit la surface fermée formée par (dS), (dS') et la surface latérale du tube de champ (S_{lat}).

D'après le théorème de Gauss, le flux du vecteur $\vec{E}$ sortant de cette surface fermée est $\phi_T = 0$ puisqu'il n'y a pas de charge. D'autre part :

$$\phi_T = \phi_{(dS)}(\vec{E}) + \phi_{(dS')}(\vec{E}) + \phi_{(S\,lat)}(\vec{E}) \quad .$$

Or, $\phi_{(S\,lat)}(\vec{E}) = 0$ car sur la surface latérale $\vec{E}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaires.

Donc : $\phi_{(dS)}(\vec{E}) = -\phi_{(dS')}(\vec{E})$.

En valeurs absolues :

$$\left|\phi_{(dS)}(\vec{E})\right| = \left|\phi_{(dS')}(\vec{E})\right| \quad .$$

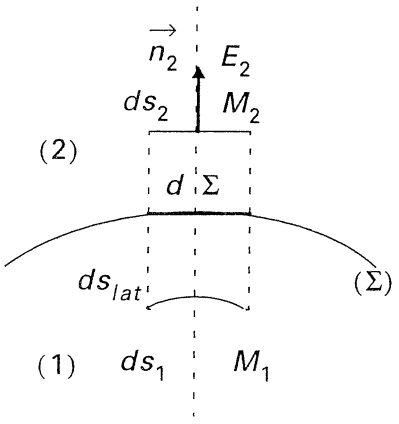
Si l'on suppose $\vec{E}$ constant sur (dS) ou (dS') et normal à (dS) et (dS')

il vient : $E \cdot dS = E' \cdot dS'$

$$dS' < dS \,,\; E' > E$$

C'est le résultat cherché.

18 -



Soient M_1 et M_2 deux points infiniment proches de (Σ). Soient dS_1 et dS_2 deux surfaces parallèles à un élément de surface $d\Sigma$ de (Σ) et délimitées par l'ensemble des perpendiculaires à (Σ) s'appuyant sur $d\Sigma$.

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée $dS_1 + dS_2 + dS_{lat}$ (on supposera que dS_{lat} et du 2e ordre par rapport à dS_1 et dS_2).

Si σ est la densité surfacique de charges sur $d\Sigma$, on a :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \vec{E}_2 \vec{n}_2 \cdot dS_2 = \frac{\sigma d\Sigma}{\varepsilon_0}.$$

Or, $dS_1 = dS_2 = d\Sigma$ puisque M_1 et M_2 sont infiniment proches de $d\Sigma$. Donc :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n'}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Posons : $\vec{n}'_1 = -\vec{n}_1$ normal à dS_1 orienté par continuité dans le même sens que $\vec{n}_2$.

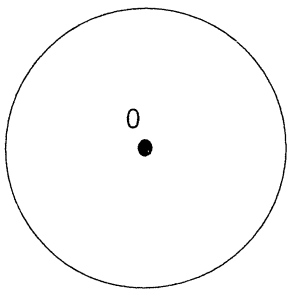
Donc : $$-\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Soit : $$\boxed{\bar{E}_{2N} - \bar{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$\bar{E}_{2N}$ et $\bar{E}_{1N}$ étant les mesures algébriques de $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_1$ sur la normale à la surface orientée dans le sens $1 \rightarrow 2$.

Si $\sigma \neq 0$ (surface chargée), on voit que E_N subit une discontinuité.

19 -



– Considérons d'abord un point situé à l'intérieur de la sphère à une distance $OM = x < R$ du centre.

Par raison de symétrie, le champ en M ne peut être que radial.

Prenons pour surface fermée (Σ) une sphère de centre O de rayon x. Le flux de $\vec{E}$ sortant de (Σ) est :

$$\phi = \int\int_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Par raison de symétrie, en tout point de (Σ), $\vec{E}$ a même module.

Donc : $$\phi = \int\int_{(\Sigma)} E \cdot d\Sigma = E \int\int_{(\Sigma)} d\Sigma = E \cdot \Sigma = E \cdot 4\pi x^2$$

D'autre part, d'après le théorème de Gauss :

$$\phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0} = 0$$

puisqu'il n'y a pas de charge à l'intérieur de (Σ).

Donc : $$\boxed{\text{si } x < R \qquad E = 0}$$

– Considérons maintenant un point M situé à une distance $x > R$ de O.

De même que ci-dessus :

$$\phi = E \cdot 4\pi x^2$$

D'autre part :

$\Sigma q_i = Q$ charge totale contenue à l'intérieur de (Σ).

Or, Q n'est autre chose que la charge portée par la sphère. Donc :

$$Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

D'où

$$\boxed{\text{si } x > R \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 x^2}}$$

On remarque que le champ créé à l'extérieur est le même que si la charge totale Q de la sphère était concentrée en son centre O.

D'autre part $\vec{E}$ est normal à la sphère. Pour $x = R - \varepsilon$, $E = 0$ pour $x = R + \varepsilon$, $E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. On retrouve bien la discontinuité $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ pour la composante normale de $\vec{E}$ (exercice 18).

20 - On emploiera un raisonnement analogue à celui de l'exercice 19.

$\vec{E}$ est radial et de module constant sur toute sphère centrée en O. On prendra pour surface de Gauss une sphère centrée en O de rayon x.

* si $x < R$

$$\phi = E \cdot 4\pi x^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(\Sigma)} \rho \, d\vartheta$$

or,

$$\iiint_{(\Sigma)} \rho \, d\vartheta = \rho \iiint_{(\Sigma)} d\vartheta = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3$$

donc :

$$\boxed{E = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0}}$$

* si $x > R$

$$\phi = E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

or,

$$Q = \iiint_{s} \rho \, d\vartheta = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

donc

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2}}$$

21 - Par raison de symétrie, le vecteur $\vec{E}$ est radial et a même module en tout point d'une sphère de centre O, de rayon x.

Appliquons le théorème de Gauss.

Le flux sortant d'une sphère (Σ) de centre O de rayon x est :

$$\phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = \iiint_{(\Sigma)} E d\Sigma = E \iint_{(\Sigma)} d\Sigma = E \cdot \Sigma \quad .$$

Donc : $\phi = E \cdot 4\pi x^2$

D'autre part la charge totale placée à l'intérieur de (Σ) est :

$$Q = \iiint_{\vartheta} \rho \, d\vartheta$$

v étant le volume limité par (Σ). Prenons comme élément de volume une couronne de rayon r d'épaisseur dr : $d\vartheta = 4\pi r^2 dr$. D'où :

$$Q = \int \rho_o e^{-kr} \cdot 4\pi r^2 dr$$

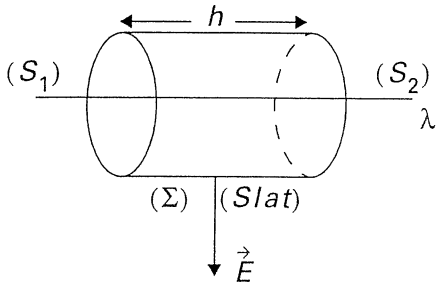
donc : $$Q = \rho_0 4\pi \int_0^x r^2 e^{-kr} dr$$

Intégrons par parties. Il vient finalement :

$$\boxed{E = \frac{2(1 - e^{-kx}) - kx(2 + kx)\, e^{-kx}}{\varepsilon_0 k^3 x^2} \rho_0}$$

On remarque que lorsque $x \to \infty$. $E \to 0$

22 -



Prenons comme surface fermée (Σ) un cylindre d'axe la ligne infinie de rayon x.

En tout point de la surface latérale, par raison de symétrie, $\vec{E}$ est radial et a même module.

Le flux de vecteur $\vec{E}$ sortant de la surface fermée est :

$$\phi(\vec{E}) = \phi_{(Slat)}(\vec{E}) + \phi_{(s_1)}(\vec{E}) + \phi_{(s_2)}(\vec{E})$$

Or, en tout point des deux bases (S_1) et (S_2), $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale, donc :

$$\phi_{(s_1)} \vec{E} = \phi_{(s_2)}(\vec{E}) = 0$$

D'autre part

$$\phi_{(Slat)}(\vec{E}) = \int\int_{(Slat)} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_{lat} \qquad = E \cdot 2\pi x h$$

La charge totale contenue dans (Σ) est :

$$Q = \lambda h \, .$$

d'où en appliquant le théorème de Gauss :

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$$

23 - Comme à l'exercice 22 on prend comme surface fermée (Σ) un cylindre de même axe que le cylindre chargé, de rayon x, de longueur h.

Par raison de symétrie, $\vec{E}$ est radial et a le même module en tout point de (Σ).

Le théorème de Gauss conduit à :

* si $x < R$

$$\phi = E \cdot 2\pi x h$$

$$Q = 0$$

d'où : $\boxed{E = 0}$

* si $x > R$

$$\phi = E \cdot 2\pi x h$$

$$Q = \sigma \cdot 2\pi R h$$

d'où : $\boxed{E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 x}}$

24 - En procédant comme à l'exercice 23, on obtient :

*si $x < R$

$$E \cdot 2\pi x h = \frac{\rho \cdot \pi x^2 h}{\varepsilon_0}$$

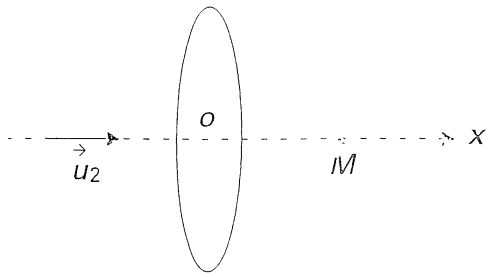
d'où : $\boxed{E = \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}}$

* si $x > R$

$$E \cdot 2\pi x h = \frac{\rho \cdot \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

d'où : $\boxed{E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 x}}$

25 -



Le champ créé au point M par l'anneau est

$$\vec{E} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

$(\overline{OM} = x)$

(le calcul est évident, compte-tenu de la symétrie)

La charge q placée en M est donc soumise à la force de Coulomb

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qQx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la charge s'écrit, en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = \frac{qQx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

La charge étant légèrement écartée de O, $x << R$ donc :

$$m\ddot{x} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3} x$$

Posons : $\omega^2 = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}$ (ω^2 est bien positif et puisque $Q > 0$, $q < 0$)

Il vient :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

L'équation caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω, donc de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{-\frac{4\pi\varepsilon_0 mR^3}{qQ}}}$$

A.N : $\boxed{T = 2,09\,s}$

4 POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

1 - Rappels

2 - Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle unique

3 - Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges discrètes

4 - Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

5 - Surfaces équipotentielles

6 - Continuité du potentiel

7 - Extremums de potentiel

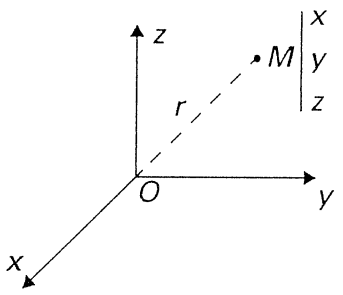
Annexe : quelques applications techniques de l'électrostatique

1 - RAPPELS

On sait que si l'on considère un champ de scalaires $G(x, y, z)$ fonction des coordonnées d'espace, on appelle **gradient** de ce champ de scalaires, le champ de vecteurs $\vec{A}$ défini par $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ G$, $\overrightarrow{\text{grad}}$ étant l'opérateur vectoriel de composantes cartésiennes $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

On sait également que le gradient de la fonction scalaire $\frac{1}{r}$ avec $r = OM$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r_3} \qquad (\vec{r} = \overrightarrow{OM})$$

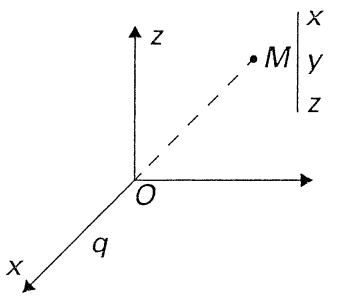


2 - POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE CHARGE PONCTUELLE UNIQUE

Soit une charge ponctuelle q placée en O, origine d'un repère orthonormé $Oxyz$. Cette charge crée en un point M un champ électrostatique $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction *OM*.



En introduisant le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, il vient :

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Or, on vient de rappeler que $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r}\right)$; d'où :

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Par définition, on appelle **potentiel électrostatique** créé par la charge ponctuelle q à la distance r le scalaire :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{constante}$$

et l'on a donc :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

**** Remarque 1***

– On a défini V par $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ + **constante** *car l'opérateur* $\overrightarrow{\text{grad}}$ *étant un opérateur de dérivation,* $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r}\right)$ *ou* $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} + \text{constante}\right)$ *sont identiques.*

**** Remarque 2***

Physiquement, on n'a aucun moyen pour déterminer le potentiel V. Par contre, on sait mesurer des différences de potentiel entre deux points M_1 *et* M_2 *:*

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

et c'est seulement la différence de potentiel qui a un sens physique. Si l'on veut malgré tout parler de potentiel en un point, il faut se donner une condition supplémentaire permettant de déterminer la constante (voir plus loin pour le potentiel coulombien).

Remarque 3 :

Dans le Système International, on prend pour unité de potentiel le volt (V). On exprime alors les champs électrostatiques en volts par mètre ($V.m^{-1}$).

3 - POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES DISCRÈTES

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_1, q_2, q_3,..., q_n créant en un même point M des champs électrostatiques $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_n$ tels que $\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$.

Le champ électrostatique total $\vec{E}$ créé en *M* sera :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

L'opérateur gradient étant relatif aux coordonnées *x, y, z* du point *M*, on a donc :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r_i}$$

Soit aussi :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

ou enfin :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

En posant encore : $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V}$,

on définit le potentiel électrostatique créé en *M* par l'ensemble de la distribution par :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_i} + \text{constante}}$$

**** Remarque***

En général, s'il n'y a pas de charges à l'infini, on prend par convention :

$\boxed{\text{constante} = 0}$ *soit* $V = 0$ *à l'infini.*

C'est la ***convention du potentiel coulombien.***

4 - POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

On passera de la distribution discrète de charges à la distribution continue comme précédemment pour le champ électrostatique en changeant $\sum_i \frac{q_i}{r_i}$ en $\iiint_{\vartheta} \frac{\rho\, d\vartheta}{r}$ si l'on a un volume chargé, $\iint_S \frac{\sigma\, dS}{r}$ si l'on a une surface chargée ou $\int_\Gamma \frac{\lambda\, dl}{r}$ si l'on a une ligne chargée.

D'où :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \text{avec} \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\vartheta} \frac{\rho\, d\vartheta}{r} + \text{constante}$$

$$\text{ou} \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma\, dS}{r} + \text{constante}$$

$$\text{ou} \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda\, dl}{r} + \text{constante}$$

S'il n'y a pas de charges à l'infini, on prendra :

$$\text{constante} = 0$$

5 - SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

1. Surfaces équipotentielles

On appelle ainsi l'ensemble des points M pour lesquels :

$$V = \text{constante}$$

2. Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Puisque les lignes de champ sont les courbes tangentes au vecteur $-\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ et d'après une propriété du gradient démontrée dans le Précis de Mécanique I, Chapitre 6, paragraphe 6,

- Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles en leurs points d'intersection.

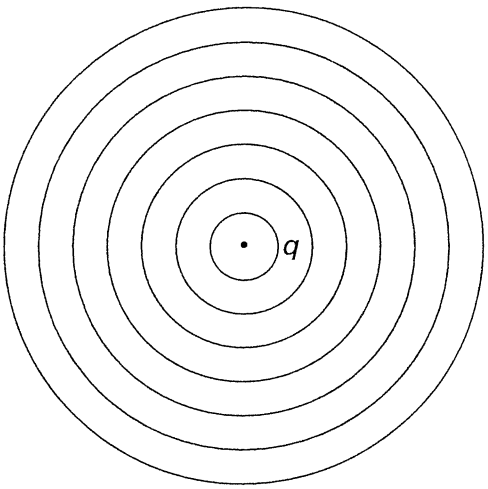
et

- Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

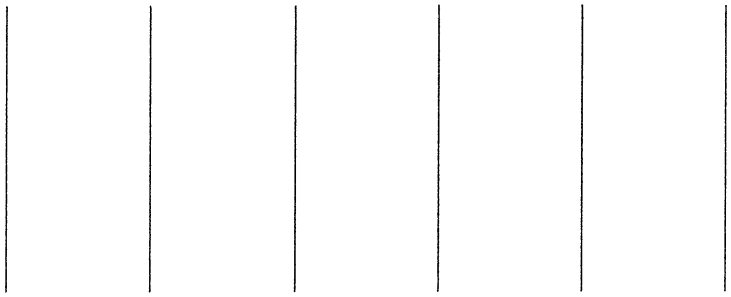
3. Exemples

Les surfaces équipotentielles peuvent être obtenues par informatique, au moyen d'un logiciel de tracé de courbes. Nous donnons, ci-après, quelques exemples de surfaces équipotentielles correspondant à des distributions simples de charges.

• *Champ créé par une charge ponctuelle*

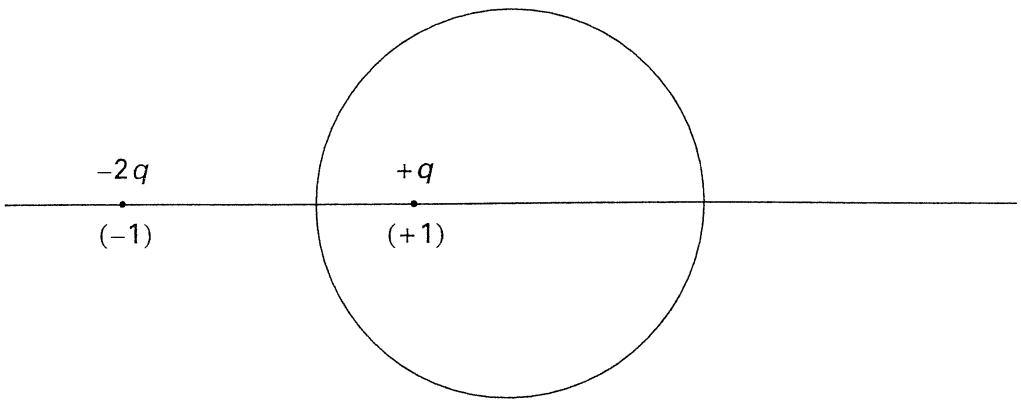


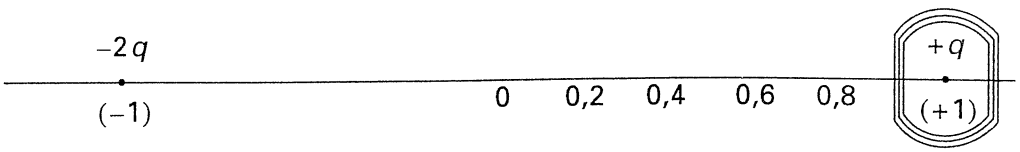
• *Champ uniforme*



• *Charges $-2q$ et $+q$*

Soient deux charges $+q = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}\,C$ et $-2q = -\frac{2}{9} \cdot 10^{-9}\,C$ placées respectivement aux points $+1$ et -1. Nous avons représenté ci-dessous les équipotentielles $V = 0$ et $V = 9$; 10 ; 11 volts. Les échelles étant très différentes, nous n'avons pu les placer sur la même figure.





6 - CONTINUITÉ DU POTENTIEL

On a vu que le champ créé par des charges ponctuelles n'était pas défini aux points où sont placées les charges. Il en est de même pour le potentiel.

On a vu que le champ créé par une distribution volumique était défini et que le champ créé par une distribution surfacique n'était pas défini sur la surface et subissait une discontinuité à la traversée de la surface (du moins en ce qui concerne sa composante normale, voir exercice 18 chap. 3).

Un raisonnement analogue à celui fait pour le champ montre que le potentiel est défini pour une distribution volumique et une distribution surfacique et que de plus le potentiel est continu lors de la traversée d'une surface chargée, ses dérivées partielles étant discontinues lors de cette traversée.

7 - EXTREMUMS DE POTENTIEL

Par application du théorème de Gauss (voir exercices 1 et 2), on établit les deux résultats suivants :

- en un point à distance finie où il n'y a pas de charge, le potentiel ne peut présenter d'extremum absolu ;
- si en un point à distance finie, le potentiel présente un maximum, alors en ce point est placée une charge positive ; s'il présente un minimum, alors en ce point est placée une charge négative.

Annexe
QUELQUES APPLICATIONS TECHNIQUES DE L'ÉLECTROSTATIQUE

Bien que l'électrostatique ait été la partie de l'électricité qui a été étudiée en premier, ce n'est pas pour autant quelque chose de vieillot et d'obsolète.

Nous allons donner ici quelques exemples de l'irruption de l'électrostatique par l'intermédiaire de la loi de Coulomb et du champ électrostatique dans la vie quotidienne.

1. Procédés de photocopie

La photocopie est tellement entrée dans les mœurs que nous ne nous demandons pas de quelle manière, en quelques secondes (voire fractions de seconde), nous obtenons un double parfait d'un document en noir et blanc ou en couleur. Nous ne décrirons, ici, que le procédé en noir et blanc, celui de la couleur étant plus compliqué et faisant appel au laser comme source de lumière. Le sélénium est un semi-conducteur possédant entre autres (voir pour plus de détails, l'ouvrage d'Électrocinétique) la propriété d'abandonner sa charge électrique lorsqu'on l'expose à la lumière.

On dispose le document à reproduire sur une vitre et on l'éclaire vivement. Au moyen d'un objectif photographique associé à un jeu de miroirs, on forme l'image de ce document sur un tambour au sélénium qui a été au préalable chargé.

Les parties claires du document réfléchissent la lumière par diffusion (voir l'ouvrage d'Optique MPSI, PSCI, PTSI) et celle-ci, arrivant sur le tambour, décharge le sélénium, tandis que les parties sombres ne réfléchissent pas la lumière.

De la poudre de graphite est apportée sur le tambour et adhère aux endroits restés chargés.

Le papier sur lequel va se former la photocopie est alors mis en contact avec le tambour.

Une différence de potentiel élevée produit le transport du graphite sur le papier.

Celui-ci passe ensuite dans un four où est fixée la poudre de graphite.

2. Peinture électrostatique

Ce procédé permet une peinture précise d'objets nécessairement conducteurs, du moins moyennement.

On établit une différence de potentiel de plusieurs dizaines de kilovolts entre le pulvérisateur de peinture et l'objet à peindre. Le pulvérisateur projette des gouttelettes de peinture qui se trouvent chargées par la différence de potentiel existant entre le pulvérisateur et l'objet. La peinture doit posséder une résistivité convenable (voir l'ouvrage d'Électrocinétique). Si elle est trop isolante, les gouttelettes ne se chargeront pas de manière satisfaisante ; éventuellement il faut lui ajouter un diluant (alcool, glycol) permettant d'avoir une résistivité de 10^4 à 10^6 Ω.m.

Les dimensions des gouttes sont également très importantes. Les grosses gouttes sont à proscrire, il faut former un brouillard très fin. Cela nécessite d'avoir un ajustage très particulier. Souvent on améliore la pulvérisation au moyen d'un compresseur.

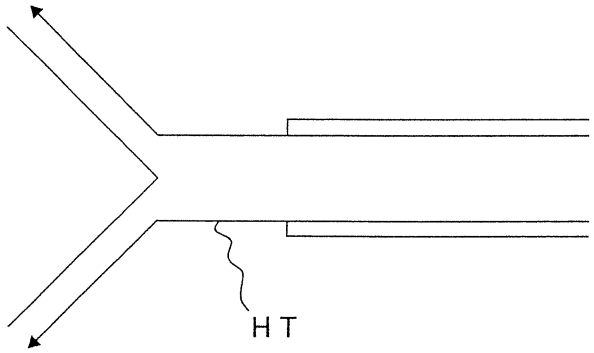
Ce procédé est très intéressant car il permet une peinture très précise, et sans perte, d'objets de forme complexe.

3. Pulvérisation de poudres

Ce procédé permet de recouvrir des pièces métalliques de poudres qui, après passage dans un four, sont beaucoup plus adhérentes que les peintures (par exemple résines époxy).

On utilise le même type de pulvérisateur que pour les peintures en munissant le pistolet d'une buse conique. La poudre, transportée par un courant d'air, traverse cette buse qui, portée à un potentiel de quelques dizaines de kilovolts, joue le rôle d'électrode ionisante.

Les grains de poudre ainsi électrisés se dirigent vers l'objet sur lequel ils forment une couche régulière, les grains déjà fixés repoussant les grains qui arrivent ensuite vers les zones de l'objet non recouvertes.



- H T : haute tension
- les pointes permettent l'effet ionisant

L'objet est ensuite passé dans un four où la poudre fond et se polymérise.

4. Pulvérisation agricole

Il s'agit d'un procédé similaire au précédent. Un ensemble de buses est porté par un tracteur et projette une poudre destinée à soigner les végétaux. La seule différence notable est la valeur de la haute tension (150 à 200 kV).

Les grains de poudre électrisés sont projetés vers le sol et se déposent sur les végétaux en recouvrant les deux faces des feuilles, les lignes de champ électrostatique pouvant contourner les obstacles.

Cela est intéressant car c'est sur la face interne des feuilles que se posent les problèmes (larves d'insectes, champignons, etc.)

On a ainsi un traitement rapide, complet et sans gaspillage : on peut économiser jusqu'à 50 % de produits de traitement.

Bien d'autres procédés industriels utilisent les propriétés des champs électrostatiques, nous n'avons fait, ici, qu'effleurer le sujet.

EXERCICES-TYPES

01 - EXTREMUM DE POTENTIEL

Par application du théorème de Gauss, montrer que, en un point où il n'y a pas de charge, le potentiel ne peut pas présenter d'extremum absolu. On raisonnera par l'absurde.

02 - MAXIMUM ET MINIMUM DE POTENTIEL

Par application du théorème de Gauss, montrer que si en un point à distance finie le potentiel présente un maximum absolu (respectivement minimum absolu), cela signifie qu'en ce point est placée une charge positive (respectivement négative).

03 - COMPOSANTE TANGENTIELLE DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Montrer que la composante tangentielle du vecteur champ électrostatique reste continue lors de la traversée d'une surface chargée.

04 - POTENTIEL CRÉÉ EN SON CENTRE PAR UN ARC DE CERCLE

Soit un arc de cercle de rayon R vu depuis le centre sous un angle 2α. Cet arc de cercle porte une densité linéique de charges λ constante. Calculer le potentiel créé au centre.

05 - POTENTIEL CRÉÉ EN SON CENTRE PAR UNE CIRCONFÉRENCE UNIFORMÉMENT CHARGÉE

Calculer le potentiel créé en un point de son axe par une circonférence de rayon R portant une densité de charges λ constante.

En déduire le champ électrostatique.

Tracer les courbes représentatives de V et E.

06 - POTENTIEL CRÉÉ PAR UN DISQUE

Calculer le potentiel créé en un point de son axe par un disque portant une densité de charges surfaciques σ constante.

En déduire le champ électrostatique. On se limitera à la partie de l'axe située du côté des charges.

07 - POTENTIEL CRÉÉ PAR UN PLAN

Déduire des résultats de l'exercice 6 le potentiel et le champ créés par un plan infini portant une densité surfacique de charges σ constante.

08 - POTENTIEL CRÉÉ PAR DEUX PLANS PARALLÈLES

Soient deux plans parallèles (π) et (π') infinis distants de a portant des densités de charges surfaciques constantes respectives $+\sigma$ et $-\sigma$. On prend (π) comme origine des potentiels. Déterminer le potentiel en tout point d'un axe perpendiculaire à (π) et (π').

09 - POTENTIEL CRÉÉ PAR UN FIL INFINI

Utilisant le résultat de l'exercice 10, chapitre 3, calculer le potentiel créé par un fil rectiligne indéfini portant une densité linéique de charges λ constante.

10 - POTENTIEL CRÉÉ PAR DEUX FILS PARALLÈLES

Soient deux fils rectilignes indéfinis parallèles distants de a portant des densités de charges $+\lambda$ et $-\lambda$.

Calculer le potentiel en un point distant de r_1 et r_2 des deux fils. On prendra pour origine des potentiels le plan équidistant des deux fils.

11 - POTENTIEL CRÉÉ PAR UN CYLINDRE

Utilisant le résultat de l'exercice 24, chapitre 3, calculer le potentiel créé par un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité volumique de charges constantes ρ.

On prendra pour origine des potentiels l'axe du cylindre.

12 - POTENTIEL CRÉÉ PAR UN SEGMENT

Soit un segment de longueur 2c portant une densité linéique de charges λ constante.

1/ Montrer que les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes admettant les

deux extrémités du segment pour foyers.

2/ En déduire le potentiel en fonction du grand axe 2a et du petit axe 2b de l'ellipsoïde.

13 - POTENTIEL CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE

Utilisant les résultats de l'exercice 20, chapitre 3, calculer le potentiel créé en un point quelconque par une distribution volumique de charges de rayon R et de densité ρ constante. On prendra pour origine des potentiels le centre O de distribution.

14 - DISTRIBUTION À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

On considère une distribution volumique de charges à symétrie sphérique de centre O créant en un point M distant de r de O un potentiel de la forme $V = \frac{C}{r} e^{-kr}$, C et k étant deux constantes.

1/ Calculer le champ électrostatique en M.

2/ En déduire la densité de charge en M.

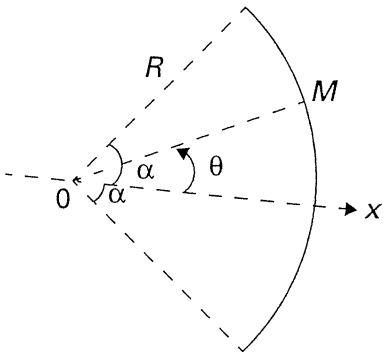
15 - DISTRIBUTION À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

On considère une sphère de centre O, de rayon R portant en un point P ($OP = r < R$) une densité volumique de charges $\rho = kr$ (k constante positive).

Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point M de l'espace. Tracer les courbes représentatives.

16 - CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR UN ARC DE CERCLE NON UNIFORMÉMENT CHARGÉ

Une tige filiforme est courbée en forme d'arc de cercle de centre O, de rayon R, vu de O sous l'angle 2α. Cette tige est chargée de manière non uniforme : en un point M la densité linéique de charges est $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$ ($\lambda_0 > 0$). Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés en O.



17 - CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR UN ARC DE CERCLE NON UNIFORMÉMENT CHARGÉ

Même énoncé que l'exercice 16 mais avec une densité linéique de charges

$\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ ($\lambda_0 > 0$).

INDICATIONS

01-02 - Appliquer le théorème de Gauss à une surface fermée entourant le point.

03 - Écrire la circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé.

04 À 07 - Calculer le potentiel créé par un élément de charge et sommer sur la distribution.

08 - Utiliser le résultat de l'exercice 7.

09-11-13 - Intégrer $\vec{E} = -\text{grad}\ V$ en utilisant un système de coordonnées convenables.

10 - Utiliser le résultat de l'exercice 9.

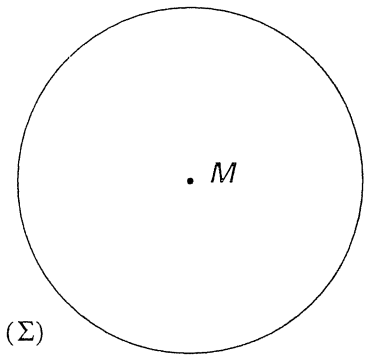
12 - Penser à une des propriétés de l'ellipse ou de l'ellipsoïde.

14 - Pour déterminer $\vec{E}$, utiliser $\vec{E} = -\text{grad } V$. Pour calculer la densité de charge, écrire le théorème de Gauss pour une mince couche sphérique.

15 À 17 - Déterminer la direction de $\vec{E}$ au moyen des symétries. En déduire $\vec{E}$, puis V par $\vec{E} = -\text{grad } V$.

SOLUTIONS

01 - Soit un point M où il n'y a pas de charge et supposons qu'en ce point le potentiel présente un maximum absolu.



Soit une surface fermée (Σ) de rayon tel qu'à l'intérieur de (Σ) il n'y ait pas de charge, entourant M. Le potentiel présentant un maximum en M, les lignes de champ fuient M et le flux du vecteur champ sortant de (Σ) est donc positif : $\Phi > 0$.

D'après le théorème de Gauss, on doit avoir $\Phi = 0$ puisqu'il n'y a pas de charge à l'intérieur de (Σ). Les conditions $\Phi > 0$ et $\Phi = 0$ sont incompatibles. Le potentiel ne peut donc présenter de maximum absolu en M.

– Inversement si le potentiel présente en M un minimum absolu, on doit avoir suivant le même raisonnement $\Phi < 0$ et $\Phi = 0$, conditions incompatibles. Le potentiel ne peut donc présenter de minimum absolu en M.

La proposition est donc établie.

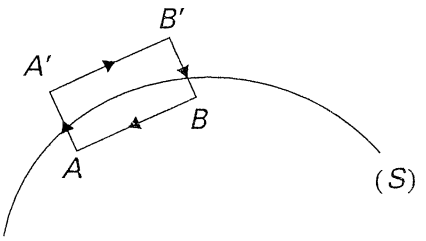
02 - Nous raisonnerons sur le maximum de potentiel. Il suffira d'inverser pour avoir le raisonnement relatif au minimum de potentiel.

Soit un point M à distance finie où est placée une charge q et supposons qu'en M le potentiel présente un maximum absolu.

Entourons M d'une surface fermée (Σ) telle qu'à l'intérieur de (Σ) il n'y ait d'autre charge que celle de M. Puisque le potentiel est maximum en M, les lignes de champ fuient M et le flux du vecteur champ sortant de (Σ) est donc positif. D'après le théorème de Gauss, $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

Donc $q > 0$. Le résultat est établi.

03 - Soit une surface chargée (S). Soit un rectangle élémentaire $A'B'BA$ tel que $A'B'$ et AB soient des infiniment petits parallèles à (S) et AA' et BB' des infiniment petits du second ordre par rapport à $A'B'$ et AB. La circulation élémentaire de $\vec{E}$ au cours d'un déplacement $\vec{dl}$ est :



$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

D'autre part :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

Donc :

$$dC = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V \cdot \vec{dl} = -dV$$

d'après la définition du gradient. Donc :

$$V_{A'} - V_{B'} = -\vec{E'}_T \cdot \overrightarrow{A'B'}$$
$$V_{B'} - V_B \approx 0$$
$$V_B - V_A = -\vec{E}_T \cdot \overrightarrow{BA}$$
$$V_A - V_{A'} \approx 0$$

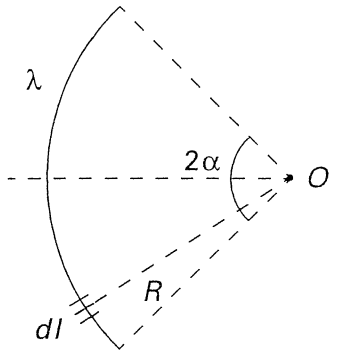
On en déduit :

$$-\vec{E'}_T \overrightarrow{A'B'} - \vec{E}_T \cdot \overrightarrow{BA} = 0$$

Or, $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ d'où $\vec{E}_T - \vec{E'}_T = 0$ soit $\boxed{\vec{E}_T = \vec{E'}_T}$

La composante tangentielle de $\vec{E}$ est donc continue. On a vu à l'exercice 12, chapitre 3 que la composante normale est discontinue. Le champ $\vec{E}$ subit donc une discontinuité.

04 - Considérons un élément d'arc *dl*. Cet arc porte une charge λdl.



Cette charge assimilée à une charge ponctuelle crée en *O* un potentiel :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R}$$

Or, $dl = Rd\alpha$. Donc :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\alpha \text{ et par suite}$$

$$V = \frac{\lambda \cdot 2\alpha}{4\pi\varepsilon_0}$$

ou $\boxed{V = \frac{\lambda\alpha}{2\pi\varepsilon_0}}$ en prenant le potentiel coulombien.

Remarque : Si on a un cercle complet, $2\alpha = 2\pi$ donc :

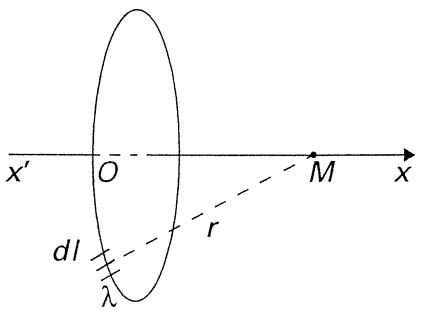
$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}}$$

05 - Soit $x'Ox$ l'axe de la circonférence.

Soit un point M d'abscisse $\overline{OM} = x$.

Considérons un élément d'arc dl portant une charge $dq = \lambda dl$. Cette charge crée en M un potentiel :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r}$$



Or, $r = \sqrt{R^2 + x^2}$

soit : $$dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}\, dl$$

En intégrant sur toute la circonférence, il vient en prenant la convention du potentiel coulombien

$$V = \frac{\lambda \cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

soit : $$\boxed{V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}}$$

On en déduit le champ électrostatique par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Ici V ne dépendant que de x, suivant l'axe $x'Ox$:

$$\bar{E} = -\frac{dV}{dx}$$

$\bar{E}$ étant la mesure algébrique de $\vec{E}$ sur $x'Ox$.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{-\lambda R x}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

$$\bar{E} = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Si $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de $x'Ox$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}\vec{u}_x}$$

Courbes $V(x)$ et $\bar{E}(x)$.

– Si λ est positive, V est toujours positif.

Comme $\dfrac{dV}{dx} = -\dfrac{\lambda R x}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$

si $x < 0$ $\dfrac{dV}{dx} > 0$.

si $x > 0$ $\dfrac{dV}{dx} < 0$.

Quand $x \to \infty$ $V \to 0$

Quand $x = 0$ $V = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0}$ et $\dfrac{dV}{dx} = 0$.

– On a $\dfrac{dE}{dx} = \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} + \dfrac{\lambda R x}{2\varepsilon_0}\left(-\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{2x}{(R^2 + x^2)^{5/2}}$

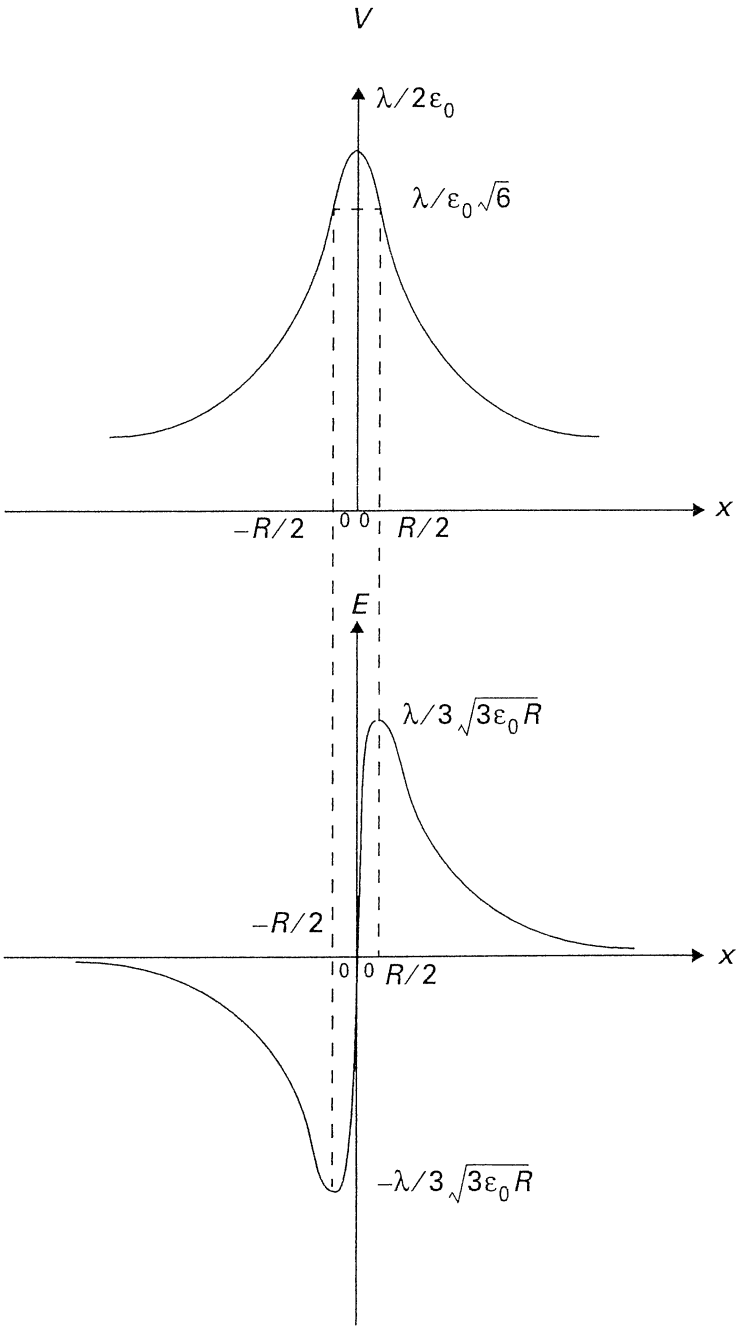
donc : $\dfrac{d\bar{E}}{dx} = \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{5/2}}(R^2 - 2x^2)$.

On en déduit les variations de $\vec{E}$ avec x :

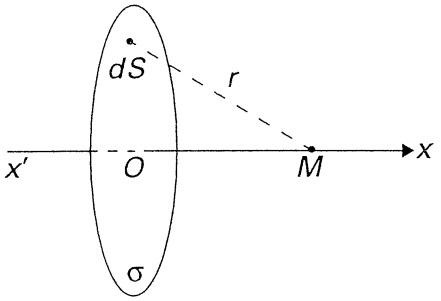
x	$-\infty$		$-\frac{R}{\sqrt{2}}$		0		$+\frac{R}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\frac{d\vec{E}}{dx}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
E	0	↘	$-\frac{\lambda}{3\sqrt{3\varepsilon_0 R}}$	↗	0	↗	$+\frac{\lambda}{3\sqrt{3\varepsilon_0 R}}$	↘	0

On voit que pour $x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$ $\frac{dE}{dx} = 0$ donc $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$. La courbe $V(x)$ présente donc deux points d'inflexion.

On obtient les courbes suivantes :



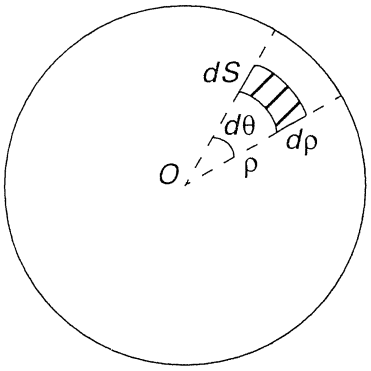
06 -



Soit $x'Ox$ l'axe du disque et M le point où l'on cherche le potentiel. Soit $\overline{OM} = x$, l'abscisse de M.

Soit un élément de surface dS du disque. Cet élément de surface porte une charge $dq = \sigma dS$ et crée un potentiel :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r}.$$



(pour éviter la confusion avec r, nous notons ρ, θ les coordonnées polaires).

Prenons un élément de surface dS valant en coordonnées polaires

$$dS = \rho\, d\rho \cdot d\theta.$$

D'où :

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{r}.$$

Or, $r^2 = x^2 + \rho^2$. Donc

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{x^2+\rho^2}}.$$

Intégrons sur tout le disque, θ variant de 0 à 2π et ρ variant de O à R rayon du disque :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

Soit :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\left[\sqrt{x^2+\rho^2}\right]_0^R$$

ou

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2}\right]$$

$$\boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2}\right]}$$

On en déduit le champ électrostatique $\vec{E}$ par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Comme V ne dépend que de x la mesure algébrique de $\vec{E}$ sur l'axe $x'Ox$ est :

$$\bar{E} = -\frac{dV}{dx}$$

or,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right]$$

donc $$\bar{E} = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\vec{u}_x}$$

$\vec{u}_x$ étant le vecteur unitaire de l'axe $x'Ox$.

On remarque que si $x \to 0$

$$\boxed{\vec{E} \to \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x} \quad \text{(selon le signe de x)}$$

07 - Pour un disque, à l'exercice 6, on a trouvé :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2}\right]$$

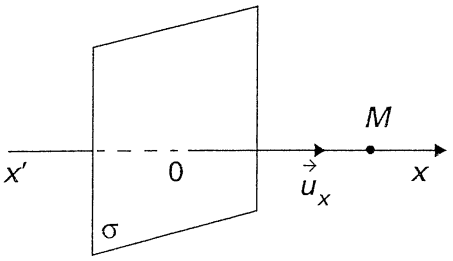
$$\vec{E} = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\vec{u}_x .$$

Si l'on fait tendre R vers l'infini, le disque précédent tend vers le plan infini.

Les expressions ci-dessus tendent :

– pour V vers l'infini ;

– pour $\vec{E}$ vers $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$.



Le résultat infini pour V provient du fait que dans le cas présent on ne peut prendre le potentiel coulombien puisqu'il y a des charges à l'infini. Néanmoins, on peut garder pour $\vec{E}$ l'expression $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$ puisque lors de la dérivation la constante du potentiel disparaît.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

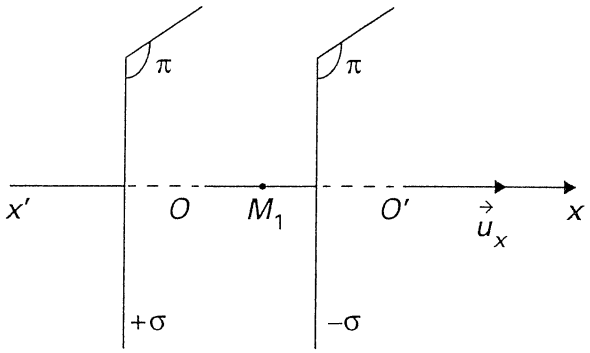
Par intégration de $\bar{E} = -\frac{dV}{dx'}$, on en déduit :

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + K.$$

Soit V_0 le potentiel du plan. On a alors :

$$\boxed{V = V_0 - \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}}$$

08 -



Pour un point M_1 situé entre (π) et (π') le champ est d'après l'exercice 7 :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u}_x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x .$$

On en déduit :

$$V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + K$$

en prenant $x = \overline{OM}_1$. Pour $x = 0$ le point est sur le plan (π). Donc par hypothèse $V = 0$. D'où $K = 0$. Par suite :

$$\boxed{V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x}$$

Pour un point M_2 situé en dehors de OO' le champ est

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x = 0 \text{ si } M_2 \text{ est entre } O' \text{ et } +\infty,$$

ou $$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u}_x) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{u}_x) = 0 \text{ si } M_2 \text{ est entre } -\infty \text{ et } 0.$$

On en déduit dans ces deux cas :

$$V = \text{constante}.$$

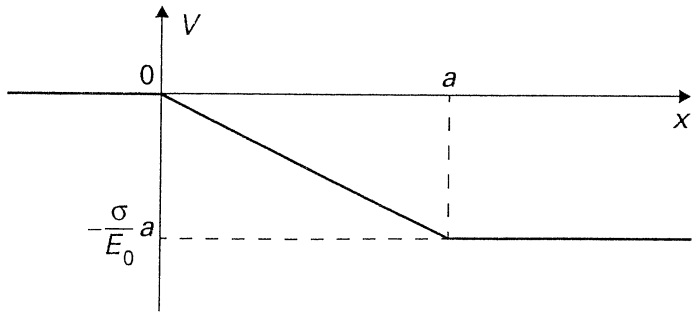
Si M_2 est tel que $\overline{OM}_2 > a$, on a donc, du fait de la continuité de V lors de la traversée d'une surface chargée :

$$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a.$$

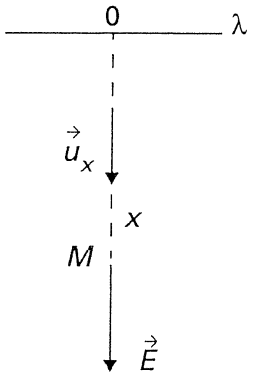
Si M_2 est tel que $\overline{OM}_2 < 0$, de même :

$$V = 0.$$

On en déduit la courbe représentative de $V(x)$:



09 -



A l'exercice 10, chapitre 3, on a trouvé qu'un fil rectiligne indéfini uniformément chargé crée en M un champ :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{u}_x .$$

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$, $\vec{E}$ ne dépendant que de x il en sera de même de V, donc :

$$E = \frac{-dV}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

donc : $dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x}$.

On en déduit :

$$\boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + K}$$

La constante K ne peut pas être prise nulle puisqu'il y a des charges à l'infini.

10 - Utilisons les résultats de l'exercice 9. Pour le fil portant $+\lambda$, on a :

$$V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + K_1.$$

Pour le fil portant $-\lambda$, on a :

$$V_2 = -\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2 + K_2 .$$

Le potentiel résultant est donc :

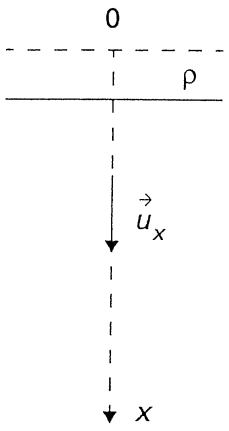
$$V = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} + K_2 + K_1$$

Écrivons que pour un point équidistant des deux fils $(r_1 = r_2)$, $V = 0$. Donc $K_1 + K_2 = 0$.

Par suite

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

11 - On a trouvé à l'exercice 24, chapitre 3, les valeurs du champ :



– pour $x < R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho x}{2\varepsilon_0}\vec{i}$

– pour $x > R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 x}\vec{i}$.

De la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$, soit ici $E = -\dfrac{dV}{dx}$, on déduit :

– pour $x < R$: $dV = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} x\,dx$

soit : $V = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0} x^2 + K$.

Écrivons que pour $x = 0$, $V = 0$ donc $K = 0$.

Par suite :

$$\boxed{\text{si} \quad x < R \qquad V = -\frac{\rho x^2}{4\varepsilon_0}}$$

– pour $x > R$: $dV = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{dx}{x}$

soit : $V = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln x + K'$.

Écrivons que lors de la traversée de la surface du cylindre, V est continu.

Donc pour $x = R$:

$$V = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

soit $-\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln R + K'$

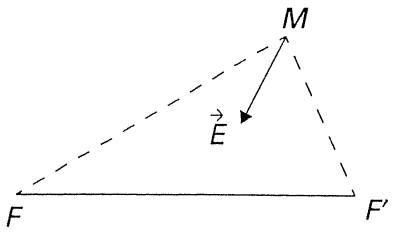
ou $K' = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(1 - 2\ln R)$

et par suite $V = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(1 - 2\ln R + 2\ln x)$

ou

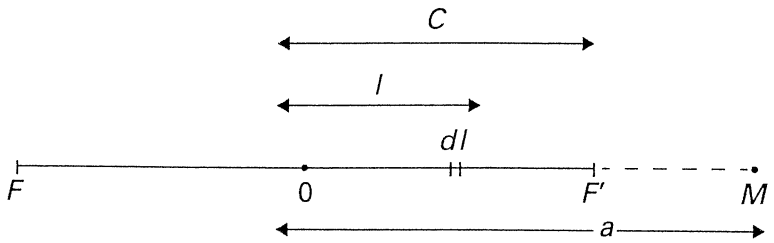
$$\boxed{V = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 + 2\ln\frac{x}{R}\right)}$$

12 -



1 – On a vu à l'exercice 15, chapitre 3 que le champ créé en M par le segment est porté par la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$. D'après les propriétés de l'ellipse, il s'en suit que dans le plan de figure la surface équipotentielle passant par M, qui est perpendiculaire à $\vec{E}$, est une ellipse admettant F et F' comme foyers. Le système étant de révolution autour de FF', il s'en suit que les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes de foyers F et F'.

2 – Calculons alors le potentiel à l'une des extrémités du grand axe.



Un élément de longueur dl portant une charge $dq = \lambda dl$ crée en M un potentiel :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{a - l}$$

On en déduit :

$$V = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} [\ln (a - l)]_{l=-c}^{l=c}$$

ou

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a + c}{a - c}$$

Comme pour une ellipse :

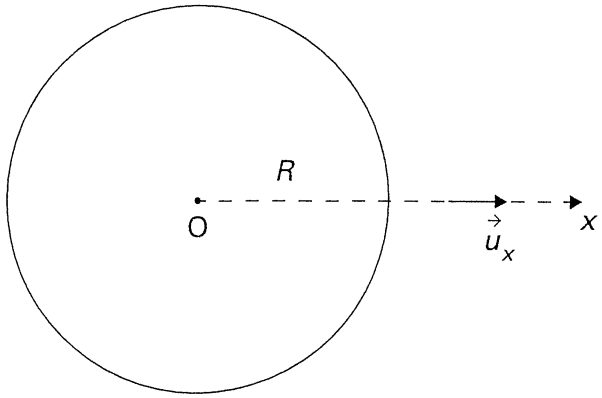
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}$$

13 - À l'exercice 20, chapitre 3, on a trouvé pour le champ les valeurs suivantes :

si $x < R$ $\quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} x \vec{u}_x$

si $x > R$ $\quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} \vec{u}_x$



La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ s'écrit ici, $\vec{E}$ ne dépendant que de x :

$$E = -\frac{dV}{dx}. \text{ Donc :}$$

pour $x < R$: $-\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{\rho x}{3\varepsilon_0}$ soit $dV = -\dfrac{\rho x}{3\varepsilon_0}dx$

$$V = -\frac{\rho x^2}{6\varepsilon_0} + K$$

On prend $V = 0$ en O donc $V = 0$ pour $x = 0$ soit $K = 0$

d'où

$$\boxed{\text{si} \quad x < R \qquad V = -\frac{\rho x^2}{6\varepsilon_0}}$$

pour $x > R$: $-\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2}$ soit $dV = -\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2}dx$

donc

$$V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x} + K'.$$

On écrit la continuité de V pour $x = R$:

$$V(R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + K' = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$$

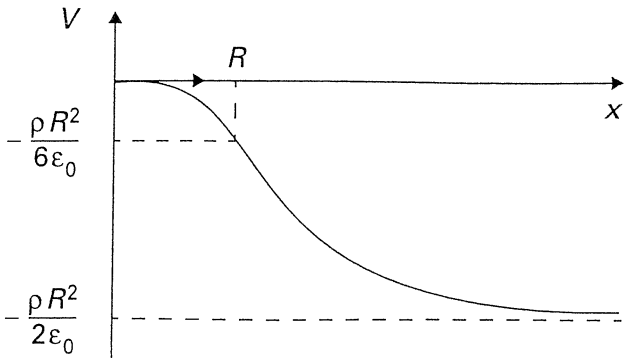
d'où $K' = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

donc $V = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x} - \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\left[\dfrac{2R}{x} - 3\right]$

Soit :

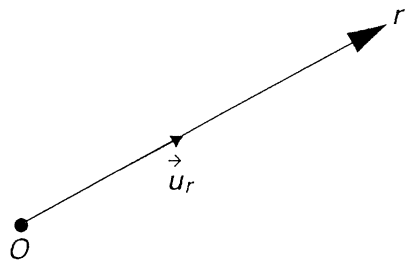
$$\boxed{\text{si} \quad x > R \qquad V = \frac{\rho R^2 (2R - 3x)}{6\varepsilon_0 x}}$$

On peut tracer la courbe $V(x)$. On obtient la représentation ci-dessous :



14 - 1 – V ne dépendant que de r, soit un axe Or orienté de O vers l'infini. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ s'écrit alors :

$$\bar{E} = -\frac{dV}{dr}$$



$\bar{E}$ étant la mesure algébrique de $\vec{E}$ sur l'axe Or.

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{C}{r^2}\,e^{-kr} + \frac{C}{r}(-k)\,e^{-kr} = -\frac{C}{r}e^{-kr}\left(k + \frac{1}{r}\right)$$

d'où : $\bar{E} = \frac{C}{r^2}(1 + kr)\,e^{-kr}$.

Si $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire de Or, on a :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{C}{r^2}(1 + kr)\,e^{-kr}\,\vec{u}_r}$$

2 – Considérons la surface fermée constituée par les deux sphères de centre O, de rayon r et $r + dr$. Écrivons le théorème de Gauss :

$$E(r + dr)\,4\pi(r + dr)^2 - E(r)\,4\pi r^2 = \frac{\rho(r) \cdot 4\pi r^2\,dr}{\varepsilon_0}$$

soit :

$$4\pi d[r^2 E(r)] = \rho(r)\frac{4\pi r^2\,dr}{\varepsilon_0}$$

donc

$$\rho(r) = \frac{\varepsilon_0}{r_2}\frac{d[r^2 E(r)]}{dr}$$

Ce qui conduit à

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{Ck^2\varepsilon_0\,e^{-kr}}{r}}$$

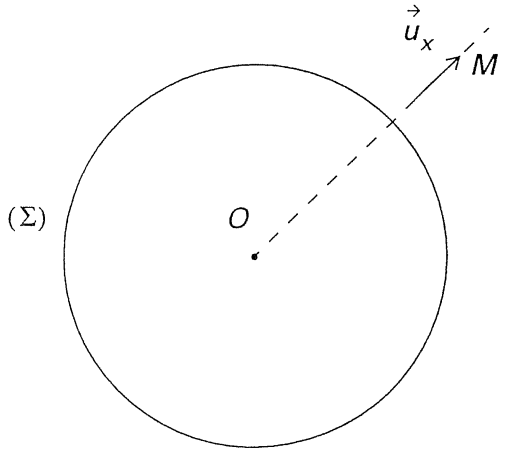
15 - *1. Champ*

$\vec{E}$ est radial en tout point. Comme K est > 0, $\vec{E}$ fuit O. Par symétrie, E ne dépendra que de $x = OM$ donc :

$$\vec{E} = E(x)\,\vec{u}_x$$

Le flux de $\vec{E}$ sortant d'une sphère (Σ) de centre O et de rayon R est

$$\phi = E(x) \cdot 4\pi x^2$$



a) $x > R$

La charge totale contenue à l'intérieur de (Σ) est

$$Q = \int_0^R kr \cdot 4\pi r^2\,dr = 4\pi k\frac{R^4}{4} = \pi k R^4$$

D'où en appliquant le théorème de Gauss :

$$E(x) \cdot 4\pi x^2 = \frac{\pi k R^4}{\varepsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\pi k R^4}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

soit :

$$\vec{E} = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 x^2}\,\vec{u}_x$$

b) $x < R$

La charge totale contenue à l'intérieur de (Σ) est alors :

$$Q = \pi k x^4$$

d'où

$$E(x) = \frac{\pi k x^4}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

soit :

$$\boxed{E = \frac{kx^2}{4\varepsilon_0}\,\vec{u}_x}$$

2. Potentiel

On calcule le potentiel par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$

a) $x > R$

$$dV = -\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 x^2} \qquad V = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 x} + K$$

On peut prendre la convention du potentiel coulombien (pas de charges à l'∞)

$x \to \infty$ $V \to 0$ d'où $K = 0$

$$V = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 x}$$

b) $x < R$

$$dV = -\frac{kx^2}{4\varepsilon_0} \qquad V = -\frac{kx^3}{12\varepsilon_0} + C$$

On détermine C par continuité en $r = R$:

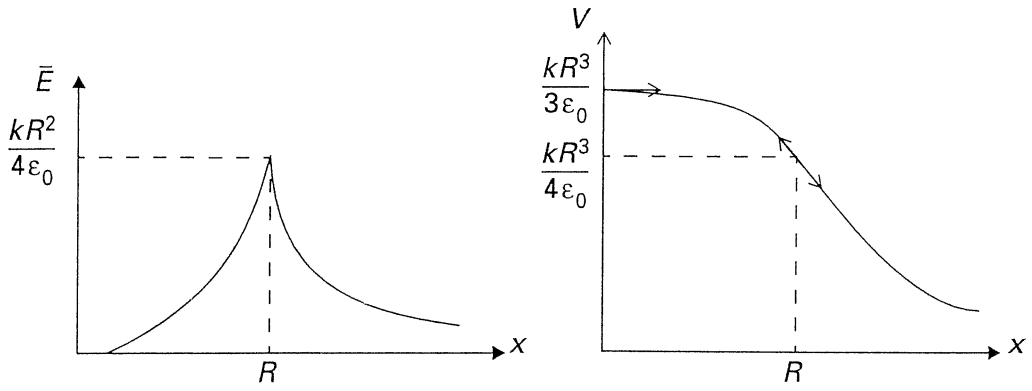
$$\frac{kR^3}{4\varepsilon_0} = -\frac{kR^3}{12\varepsilon_0} + C$$

$$C = \frac{KR^3}{3\varepsilon_0}$$

$$V = -\frac{kx^3}{12\varepsilon_0} + \frac{KR^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{V = \frac{k}{12\varepsilon_0}(4R^3 - x^3)}$$

3. Courbes représentatives



Commentaire

On vérifie bien que $\vec{E}$ est continu pour $x = R$. Cela est normal : la surface de rayon R n'est pas chargée.

16 - Un élément de longueur centré en M vu de O sous l'angle $d\theta$ porte $dq = \lambda R d\theta = \lambda_0 R \cos\theta\, d\theta$. Il crée en O le champ :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\lambda_0 R \cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\vec{u}_r \qquad \left(\vec{u}_r \text{ unitaire de } \overrightarrow{MO} : \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{MO}}{R}\right)$$

soit :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta\,\vec{u}_r$$

L'axe Ox est axe de symétrie pour la répartition. Donc le champ résultant est porté par Ox. La composante utile de $\overrightarrow{dE}$ est donc :

$$dE_x = dE\cos\theta$$

soit :

$$dE_x = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos^2\theta\, d\theta$$

Le champ résultant est donc :

$$E = \int_{\theta=-\alpha}^{\theta=+\alpha} dE_x$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda_0 (2\alpha + \sin 2\alpha)}{8\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{u}_x}$$ avec l'orientation choisie par l'énoncé pour l'axe Ox.

Le potentiel électrostatique créé en O par l'élément de longueur est

$$dV = \frac{\lambda_0 R\cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\, d\theta$$

Le potentiel créé par l'axe de cercle est, par suite :

$$V = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

soit :

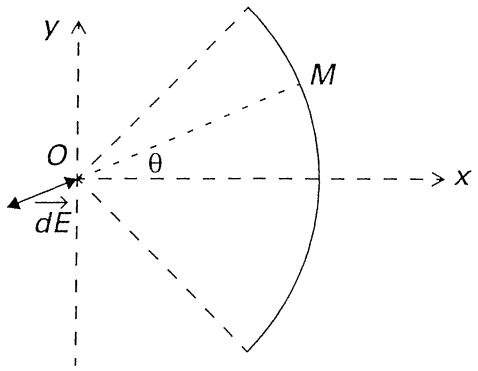
$$\boxed{V = \frac{\lambda_0 \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0}}$$

17 - Un élément de longueur centré en M, vu de O sous l'angle $d\theta$ porte $dq = \lambda R d\theta = \lambda_0 R \sin\theta\, d\theta$. Il crée en O le champ :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\lambda_0 R\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\vec{u}_r \qquad \left(\vec{u}_r \text{ unitaire de } \overrightarrow{MO} : \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{MO}}{R}\right)$$

soit : $$\overrightarrow{dE} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\, d\theta\ \vec{u}_r$$

L'axe *Ox* est axe d'antisymétrie pour la répartition. Donc, le champ résultant est perpendiculaire à *Ox* : $\vec{E}$ est donc porté par *Oy*.



La projection de $\overrightarrow{dE}$ sur *Oy* est

$$dE_y = -dE\sin\theta$$

donc

$$dE_y = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\theta\, d\theta$$

Le champ résultant est, par suite :

$$E = \int_{\theta=-\alpha}^{\theta=+\alpha} dE_y$$

Soit : $\boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda_0\,(2\alpha - \sin 2\alpha)}{8\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{u}_y}$ avec l'orientation ci-dessus de *Oy*.

Le potentiel électrostatique créé en *O* par l'élément de longueur est :

$$dV = \frac{\lambda_0 R\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta$$

Le potentiel créé par l'arc de cercle est donc :

$$V = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cos\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

soit : $$\boxed{V = 0}$$

5 DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

1. Définitions
2. Potentiel créé à grande distance par un dipôle
3. Champ créé à grande distance par un dipôle
4. Positions principales de Gauss
5. Lignes de champ – Surfaces équipotentielles
6. Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle
Annexe : le dipôle électrostatique en chimie

1 - DÉFINITIONS

* On appelle **dipôle électrostatique** l'ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ situées à une distance a l'une de l'autre, cette distance étant petite par rapport à la distance à laquelle on étudie les effets (champ et potentiel créés par ces deux charges).

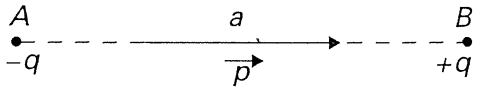
En pratique, la notion de dipôle est relative aux molécules diatomiques.

* **Moment dipolaire**

On appelle **moment dipolaire** le vecteur

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{AB}}$$

C'est donc un vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive.



* **Unités de moment dipolaire**

Dans le Système International, le module de $\vec{p}$ s'exprime en coulomb-mètre (C.m).

En fait, les charges considérées sont toujours très faibles, les distances AB aussi. On utilise en pratique une unité abberrante : le **debye (D)** valant :

$$\boxed{1\ D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29}\, C \cdot m}$$

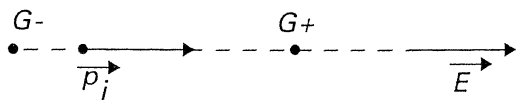
Ainsi, les moments dipolaires usuels vont de fractions de debye à quelques debyes.

* **Dipôle permanent**

C'est un dipôle dont la distance AB est invariable, donc pour lequel $\vec{p}$ est un vecteur constant dans un référentiel lié à AB.

* **Dipôle induit**

Soit une molécule ne possédant pas de moment dipolaire. Cela signifie que les barycentres $G+$ et $G-$ des charges + et – de la molécule sont confondus. Si on place cette



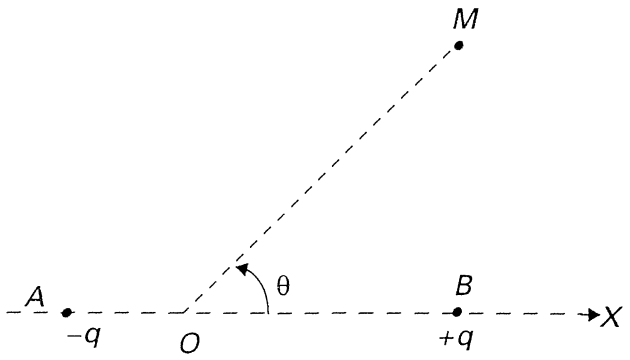
molécule dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$, $G+$ et $G-$ sont déplacés respectivement dans le sens de $\vec{E}$ et dans le sens opposé à $\vec{E}$. À l'équilibre (car rappelons que toutes les charges que nous considérons sont supposées au repos), le système possède un moment dipolaire $\vec{p}_i$ dit **moment dipolaire induit** colinéaire à $\vec{E}$. On pose $\vec{p}_i = \alpha\vec{E}$, α est la **polarisabilité** de la molécule.

**** Remarque :***

Dans une molécule possédant un moment dipolaire permanent, il peut se faire que se superpose à celui-ci un moment dipôlaire induit.

2 - POTENTIEL CRÉÉ À GRANDE DISTANCE PAR UN DIPÔLE

Soit un dipôle $(-q, +q)$. Soit un axe polaire Ox porté par AB et orienté de A (charge $-q$) vers B (charge $+q$).



Soit un point M repéré par ses coordonnées polaires : $r = OM$, $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.

On suppose que r est très grand devant $a = AB$.

Le potentiel V créé par le dipôle en M est :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-q}{AM} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{BM}$$ (en prenant le potentiel coulombien)

ou :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

Or, $BM^2 = OB^2 + OM^2 - 2OB\cdot OM\cdot\cos\theta = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar\cos\theta$, soit :

$$BM = \rho\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right]^{1/2}$$

De même, en changeant θ en $\pi - \theta$:

$$AM = r\left[1 + \frac{a}{r}\cos + \frac{a^2}{4r^2}\right]^{1/2}$$

d'où :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}\right]$$

Développons V au premier ordre suivant l'infiniment petit $\frac{a}{r}$:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right]$$

Soit, finalement :

$$\boxed{V = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Comme $qa = p$, module du moment dipolaire :

$$\boxed{V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Si l'on pose $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, V peut s'écrire aussi :

$$\boxed{V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

Enfin, puisque l'on sait que $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$, il vient :

$$\boxed{V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)}$$

3 - CHAMP CRÉÉ À GRANDE DISTANCE PAR UN DIPÔLE

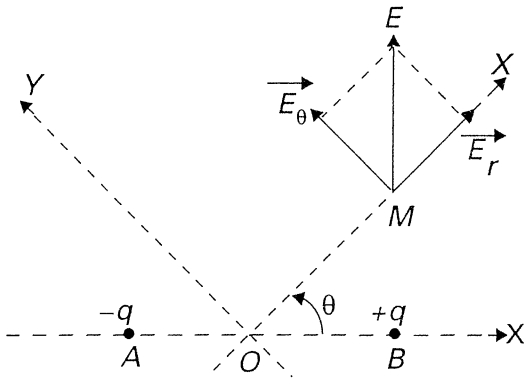
Dans le plan $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}$, considérons le repère orthonormé OX colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et de même sens et OY directement perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$. Soit E_r la composante de $\vec{E}$ suivant OX et soit E_0 la composante de $\vec{E}$ suivant OY.

Comme en coordonnées polaires, les composantes du gradient sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{d\theta} \end{cases}$$

La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ permet d'écrire :

$$\vec{E}\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$



Soit :

$$\boxed{\vec{E}\begin{cases} E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases}}$$

N'oublions pas que E_r et E_θ sont les composantes de $\vec{E}$ suivant OX et OY, ce sont donc des quantités algébriques.

Si M est dans le premier quadrant $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$, E_r et E_θ sont positifs (cas de la figure ci-dessus). Si M est dans le deuxième quadrant $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, E_r est négatif et E_θ est positif. Si M est dans le troisième quadrant $\left(\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$, E_r et E_θ sont négatifs. Enfin, si M est dans le quatrième quadrant $\left(\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$, E_r est positif et E_θ est négatif.

4 - POSITIONS PRINCIPALES DE GAUSS

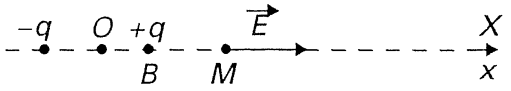
On appelle **positions principales de Gauss,** les positions de M pour lesquelles $\vec{E}$ **est parallèle à** $\vec{p}$. On en distingue deux sortes :

1. Les premières positions principales de Gauss

Elles correspondent à $E_\theta = 0$, soit $\sin\theta = 0$; donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

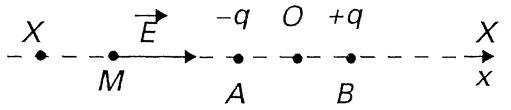
a/ $\theta = 0$. Alors :

$$\boxed{E_r = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$



b/ $\theta = \pi$. Alors :

$$\boxed{E_r = -\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

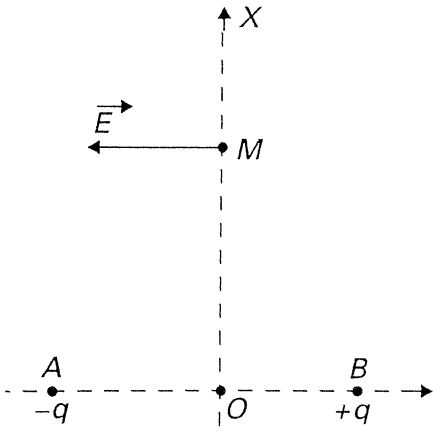


Pour deux positions M et M' symétriques par rapport à 0 sur Ox, $\vec{E}$ est le même. Vectoriellement, on peut écrire :

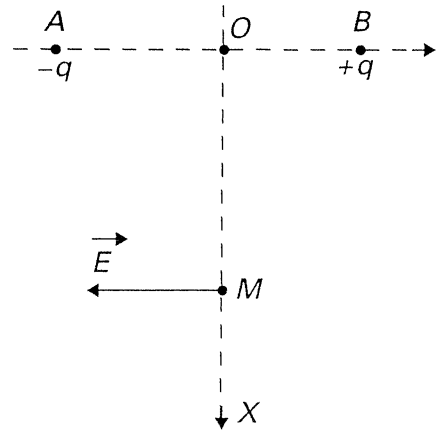
$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

2. Deuxièmes positions principales de Gauss

Elles correspondent à $E_r = 0$, soit $\cos\theta = 0$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



a/ $\theta = \frac{\pi}{2}$. Alors : $\boxed{E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$



b/ $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Alors : $\boxed{E_\theta = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}}$

Vectoriellement, on voit qu'on peut écrire :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

5 - LIGNES DE CHAMP – SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

1. Lignes de champ

En coordonnées polaires, les lignes de champ sont données par la relation différentielle :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

soit :

$$\frac{dr}{\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}} = \frac{r d\theta}{\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}} \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta} = 2\,\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

En intégrant, il vient :

$$\boxed{r = C\sin^2\theta}$$

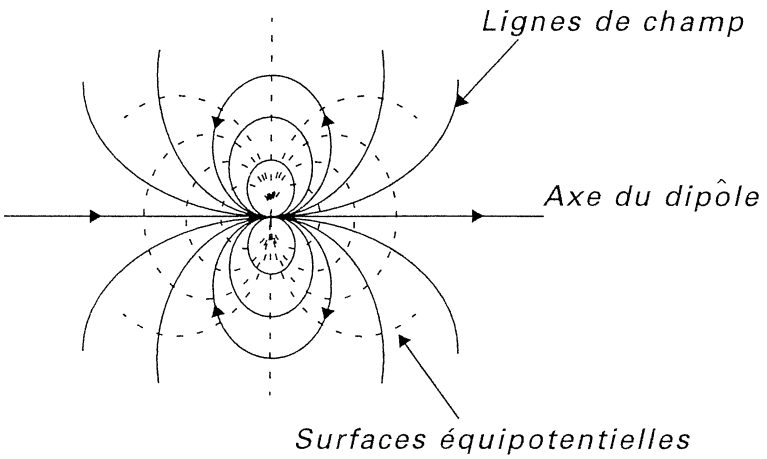
C étant une constante positive.

2. Surfaces équipotentielles

Elles sont données par V = constante, soit dans le plan Ox, OM :

$$\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \text{constante ou } \boxed{r^2 = k\cos\theta}$$

k étant une constante positive si $0 < \cos\theta$, donc si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, négative si $0 > \cos\theta$, donc si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Les surfaces équipotentielles sont de révolutions autour de Ox.



N'oublions pas que ces équations polaires des lignes de champ et des surfaces équipotentielles correspondent au cas $r >> a$, donc ne signifient plus rien au voisinage des charges $-q$ et $+q$.

Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles ont l'allure ci-contre.

6 - ACTION D'UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE EXTÉRIEUR SUR UN DIPÔLE

Soit un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ placé dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$.

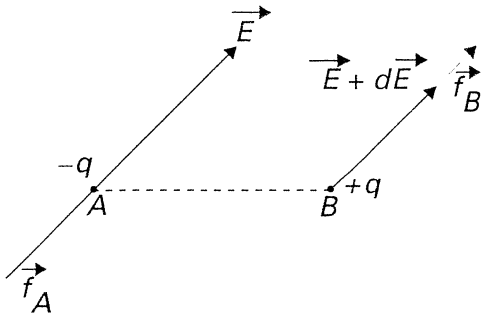
Soit $\vec{E}$ la valeur du champ en A où est placée la charge $-q$, $\vec{E} + d\vec{E}$ la valeur du champ en B où est placée la charge $+q$.

La charge $-q$ est soumise à la force $\vec{f}_A = -q\vec{E}$.

La charge $+q$ est soumise à la force $\vec{f}_B = +q(\vec{E} + d\vec{E})$.

Soit :

$$\vec{f}_B = -\vec{f}_A + q\overrightarrow{dE}$$



On peut donc considérer que le dipôle est soumis à :

– un couple $\vec{f}_A, -\vec{f}_A$ de moment résultant $\vec{C}$;

– une résultante générale $\overrightarrow{df} = \vec{f}_B + \vec{f}_A = q\overrightarrow{dE}$, si $\vec{E}$ est uniforme, $\overrightarrow{dE} = 0$, donc $d\vec{f} = 0$.

1. Détermination du moment résultant

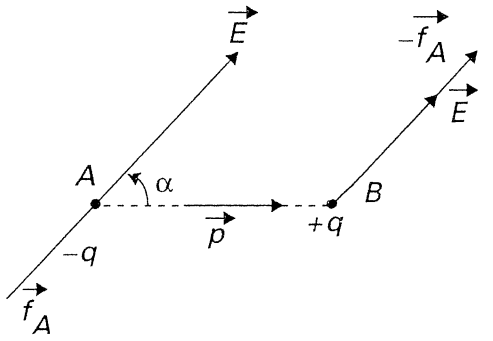
Par définition du moment du couple, on a :

$\vec{C} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}_B = \overrightarrow{AB} \wedge (q\vec{E})$, soit

$\vec{C} = q \cdot \overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}$

Or, $q \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{p}$, donc :

$$\boxed{\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$



Les positions d'équilibre d'un dipôle dans un champ uniforme (donc soumis seulement au couple) correspondent à $\vec{C} = 0$, soit $\vec{p}$ colinéaire à $\vec{E}$.

Si $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}) = 0$, l'équilibre est stable.

Si $\alpha = \pi$, l'équilibre est instable.

2. Détermination de la résultante générale

La résultante générale est :

$$\overrightarrow{df} = q \cdot \overrightarrow{dE}$$

Or, $\overrightarrow{dE} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}dz$ en rapportant l'espace à un repère cartésien $Oxyz$.

Soient x, y, z les coordonnées de A ; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ celles de B.

Les composantes de $\vec{p}$ sont alors : $\vec{p} \begin{cases} qdx \\ qdy \\ qdz \end{cases}$

La composante de $\vec{df}$ suivant Ox est :

$$df_x = q\frac{\partial E_x}{\partial x}dx + q\frac{\partial E_x}{\partial y}dy + q\frac{\partial E_x}{\partial z}dz$$

Or, $\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$ puisque :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ et } E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

En procédant de la même façon pour $\frac{\partial E_x}{\partial z}$, il vient :

$$df_x = q\frac{\partial E_x}{\partial x}dx + q\frac{\partial E_y}{\partial x}dy + q\frac{\partial E_z}{\partial x}dz$$

On reconnaît le développement du produit scalaire du vecteur $\vec{p}$ et du vecteur $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$.

Donc :

$$df_x = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$$

De même pour df_y et df_z.

Donc, la résultante générale a pour composantes :

$$\vec{df} \begin{cases} \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \\ \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \\ \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \end{cases}$$

Symboliquement, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{df} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{E}}$$

Annexe :
LE DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE EN CHIMIE

La notion du dipôle telle que nous l'avons étudiée de manière théorique ci-dessus, ne présente d'intérêt qu'à l'échelle de la matière : on ne réaliserait pas un dipôle conforme au modèle étudié précédemment en plaçant, par exemple, deux charges opposées de $10^{-8} C$ à un mètre l'une de l'autre et en étudiant les effets à 10 km.

On sait que dans une liaison, très souvent, les électrons de liaison ne sont pas répartis symétriquement mais sont plus proches de l'un des atomes (le plus électronégatif) que de l'autre.

D'autre part ces électrons sont en mouvement incessant autour des noyaux. De sorte que globalement les barycentres G_+ et G_- des charges positives et négatives des deux atomes liés sont légèrement décalés.

Statistiquement, tout se passe comme si l'atome le plus électronégatif portait une charge excédentaire négative $-\delta e$ et l'atome le moins électronégatif une charge excédentaire positive $+\delta e$ (e charge élémentaire).

Évidemment, $\delta < 1$ puisque la rupture de la liaison conduisant à deux ions correspondrait à $\delta = 1$

Si α est la distance entre G_+ et G_-, le moment dipolaire de la liaison est alors :

$$p = \delta e \alpha$$

Pour une molécule polyatomique, on définit un moment dipolaire total par la somme géométrique :

$$p = \Sigma_i \vec{p}_i,$$

les $\vec{p}_i$ représentant les moments dipolaires de chaque liaison. En fait, les choses ne sont pas si simples que cela car la présence de doublets d'électrons non appariés, modifie le moment dipôlaire total. Par exemple, dans la molécule NH_3 de forme pyramidale, le doublet libre de l'azote contribue de manière significative au moment dipolaire total.

La connaissance du moment dipolaire d'une molécule permet souvent d'avoir des renseignements sur la structure de la molécule. Par exemple, le molécule de dioxyde de carbone (CO_2) a un moment dipolaire nul :

la liaison $C = O$ étant nettement polarisée, la molécule est nécessairement linéaire.

Inversement la molécule d'eau (H_2O) de moment dipolaire 1,85 D est nécessairement angulaire.

Les composés organiques à carbone tétraédrique ont un moment dipolaire global nul, mais une déformation structurelle due à un encombrement stérique peut donner à la molécule un moment dipolaire global non nul.

Par exemple, $CH_3 - \underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}} - CH_3$, le méthylo propane possède un moment dipolaire de 0,1.

D en raison de la déformation de structure créée par les groupements méthyles.

Le moment dipolaire d'une liaison donnée entre atomes dépend des liaisons dans lesquelles sont engagés ces atomes. Par exemple, le moment dipolaire du monochloréthylène $CH_2 = CH - Cl$ est de 1,45 *D*, celui du chlorure d'éthyle $CH_3 - CH_2 - Cl$ est de 2,10 *D*.

Cela est dû au fait que les liaisons $C - H$ et $C - Cl$ n'ont pas le même moment dipolaire.

Dans les deux types de composés, le doublet π de la liaison $C = C$ apportant une contribution au moment dipolaire global par sa forme mésomère :

$$\overset{\ominus}{CH_2} - CH = \overset{\oplus}{Cl}$$

Toutes ces considérations montrent que la notion de dipôle est loin d'être simple et que le modèle élémentaire que nous avons étudié ci-dessus ne saurait rendre compte complètement de la réalité.

EXERCICES-TYPES

01 – DIPÔLE PLACÉ DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE EXTÉRIEUR

Soit un champ uniforme $\vec{E}_0$ créant en un point O un potentiel V_0. En O, on place un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ parallèle à $\vec{E}_0$ et de même sens.

1/ Calculer le potentiel créé en un point M à grande distance.

2/ En déduire qu'il existe une équipotentielle sphérique dont on déterminera le rayon.

3/ Calculer le champ en M.

02 – POINTS OÙ LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE EST PERPENDICULAIRE AU MOMENT DIPOLAIRE

Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le champ électrostatique $\vec{E}$ est perpendiculaire au moment dipolaire $\vec{p}$.

03 – CHAMP CRÉÉ PAR UN DIPÔLE

Soit un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ de centre O. Soit un point M à grande distance repéré par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Montrer que le champ créé par le dipôle en M peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{p} - 3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r}\right)$$

04 – ENSEMBLE DE TROIS CHARGES PLACÉES SUR UN AXE

Sur un axe $x'Ox$, on place en O une charge $+2q$ et en deux points A et B d'abscisses $-a$ et $+a$ des charges $-q$.

Calculer le potentiel à grande distance.

En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ.

05 – ENSEMBLE DE QUATRE CHARGES PLACÉES AUX SOMMETS D'UN CARRÉ

On considère un carré de côté $2a$ de centre O. À chaque sommet, on place alternativement des charges $+q$ et $-q$.

Calculer le potentiel en un point situé à grande distance dans le plan du carré.

En déduire les composantes du champ.

Donner les équations polaires des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.

06 – DISTRIBUTION MULTIPOLAIRE

Soit un ensemble de n charges ponctuelles q_i placées en des points P_i situés à des distances R_i d'un point O. Soit un point M situé à une distance R de O. On supposera $R >> R_i$.

Calculer le potentiel créé par l'ensemble de charges ponctuelles en M. Examiner les cas particuliers :

a/ $\sum_{i=1}^{n} q_i \neq 0$

b/ $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} q_i\vec{R}_i \neq 0$ $(\vec{R}_i = \overrightarrow{OP_i})$

c/ $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} q_i\vec{R}_i = 0$

07 – DISTRIBUTION SURFACIQUE DIPOLAIRE

Soit un disque de rayon R d'épaisseur e portant une densité surfacique de charges σ sur l'une des faces et $-\sigma$ sur l'autre face.

Calculer le potentiel créé à grande distance.

08 – DISTRIBUTION LINÉIQUE DIPOLAIRE

On considère deux fils rectilignes indéfinis parallèles portant respectivement des densités linéiques de charges constantes $+\lambda$ et $-\lambda$. Soient A et B les

intersections des deux fils $-\lambda$ et $+\lambda$ avec un plan (π) perpendiculaire à ceux-ci. Soit M un point de (π) situé à une distance (r) perpendiculaire à ceux-ci. Soit M un point de (π) situé à une distance r du milieu O de AB dans la direction $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM})$. On suppose $r >> a$ en posant $a = AB$.

1/ Calculer le potentiel en M en prenant $V = 0$ en O.

2/ En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ, son module et sa direction.

09 – FORCE D'INTERACTION DE DEUX DIPÔLES PERMANENTS

Soit un dipôle de centre O_1 de moment dipolaire $\vec{p}_1$. En un point O_2 de la droite portant $\vec{p}_1$ on place un second dipôle de moment dipolaire $\vec{p}_2$ parallèlement à $\vec{p}_1$. Soit D la distance O_1O_2 et soit a la distance entre les deux charges du second dipôle.

Calculer la force exercée par le premier dipôle sur le second.

10 – FORCE D'INTERACTION D'UN DIPÔLE PERMANENT ET D'UN DIPÔLE INDUIT

Reprendre l'exercice 9 en supposant que le premier dipôle est un dipôle permanent et que le second est un dipôle induit, la polarisabilité étant α.

INDICATIONS

01 - Superposer les deux champs.

02 - Utiliser le résultat du cours.

03 - Exprimer $\overrightarrow{grad}V$ en fonction de $\vec{p}$ et $\vec{r}$ (calculer le gradient en coordonnées cartésiennes).

04 - Reprendre le calcul du paragraphe 2 en l'adaptant à cet exercice.

05 - Calculer d'abord V en utilisant les coordonnées cartésiennes et en faisant un développement limité convenable. Passer ensuite aux coordonnées polaires.

Calculer les composantes de $\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes. Passer ensuite aux coordonnées polaires.

06 - Procéder comme dans le cours, mais en gardant les vecteurs et sans limiter le développement aux tous premiers termes.

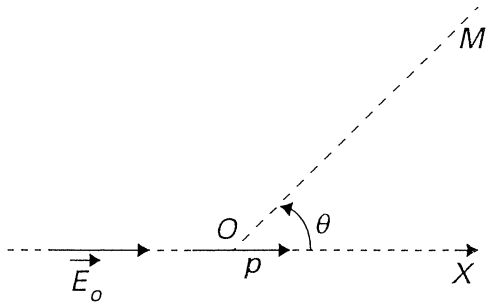
07 - Faire apparaître un moment dipolaire élémentaire et un angle solide.

08 - Utiliser le résultat de l'exercice 9, chapitre 4.

09-10 - Modéliser le second dipôle par deux charges opposées. Calculer le champ agissant sur chacune de ces charges, d'où la force.

SOLUTIONS

01



Le potentiel créé en M par le dipôle est

$$V_1 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Le potentiel créé en M par le champ constant est V_2.

On a $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{grad}V_2$ soit en projection sur Ox :

$$E_0 = -\frac{dV_2}{dx}.$$

Donc, $dV_2 = -E_0 dx$, soit en intégrant entre O et M :

$$V_2 - V_0 = -E_0 r\cos\theta.$$

Donc : $$V_2 = V_0 - E_0 r\cos\theta.$$

Par suite le potentiel total créé en M est

$$V = V_1 + V_2$$

soit : $$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + V_0 - E_0 r\cos\theta$$

ou $$\boxed{V = V_0 + \cos\theta\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r\right)}$$

2 - Pour avoir une équipotentielle sphérique, il faut avoir V indépendant de θ, donc :

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 = 0$$

d'où $$\boxed{r = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Le potentiel de cette surface est donc $\boxed{V = V_0}$

3 - Le champ en M est donné par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Les composantes radiale et orthoradiale sont donc

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\cos\theta\left(\frac{-2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0\right)$$

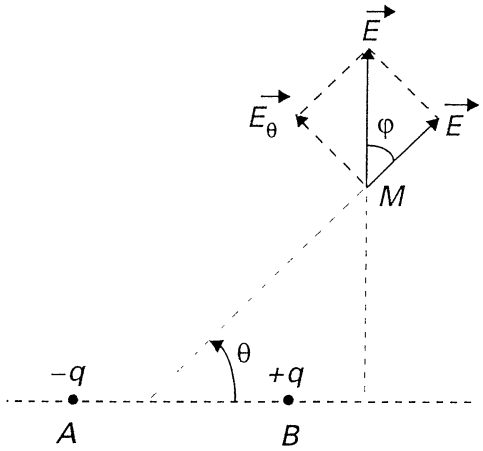
soit : $$\boxed{E = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + E_0\cos\theta}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} = -\frac{1}{r}(-\sin\theta)\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r\right)$$

$$\boxed{E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0\sin\theta}$$

On vérifie bien que le champ obtenu est la somme du champ $\vec{E}_0$ et du champ créé par le dipôle.

02



On cherche l'ensemble des points pour lesquels

$$\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$$

or, $$\tan\varphi = \frac{E_\theta}{E_r}.$$

Avec les valeurs de E_θ et E_r du cours il vient :

$$\tan\varphi = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 r^3}{2p\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta\,.$$

Comme $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$, soit $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$:

$$\tan\varphi = \text{cotan}\,\theta .$$

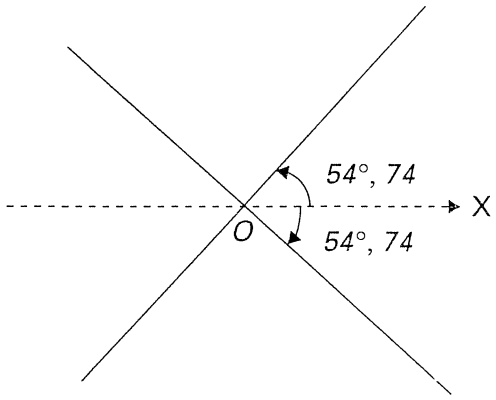
d'où $$\text{cotan}\,\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta .$$

Donc : $$\tan^2\theta = 2$$

ou $$\tan\theta = \pm\sqrt{2} .$$

Soit : $$\theta = \pm 54°,74$$

L'ensemble des points *M* cherché est constitué par deux nappes coniques de demi angle au sommet 54°,74 d'axe *Ox*.



03 - Le potentiel créé à grande distance par le dipôle est :

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} .$$

De plus $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Donc :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} .$$

Rapportons l'espace à un repère *Ox*, *Oy*, *Oz*. Les composantes de $\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ sont :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{p}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{p}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

Si $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont les vecteurs unitaires des axes et x, y, z les coordonnées du point :

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$r^3 = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\vec{u}_z}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4}\cdot\frac{x}{r}$$

et de même pour les deux autres composantes. Donc :

$$\overrightarrow{grad}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{3}\begin{cases} \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{u}_x}{r^3} - \dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,x}{r^5} \\ \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{u}_y}{r^3} - \dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,y}{r^5} \\ \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{u}_z}{r^3} - \dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,z}{r^5} \end{cases}$$

soit vectoriellement :

$$\overrightarrow{grad}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\vec{u}_x + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\vec{u}_y + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\vec{u}_z - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)\,.$$

Comme $$(\vec{p}\cdot\vec{u}_x)\cdot\vec{u}_x + (\vec{p}\cdot\vec{u}_y)\cdot\vec{u}_y + (\vec{p}\cdot\vec{u}_z)\cdot\vec{u}_z$$

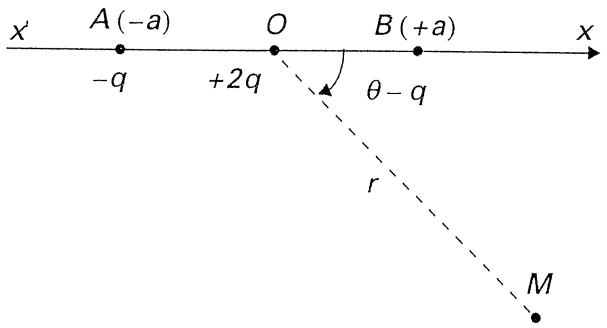
n'est rien d'autre que $\vec{p}$, il vient :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{(3\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}\right]$$

soit :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^2}\vec{r}\right)}$$

04 -



On utilisera les coordonnées polaires $\theta = (\vec{Ox}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$. En M le potentiel est :

$$V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 OM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 BM}$$

or, $$BM^2 = a^{r^2} + r^2 - 2ar\cos\theta$$

donc $$\frac{1}{BM} = \frac{1}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{1/2}} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Développons au second ordre suivant l'infiniment petit $\frac{a}{r}$.

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right]$$

De même en changeant θ en $\pi - \theta$:

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right]$$

D'où :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta + 2 - 1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right]$$

Il reste : $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right]$$

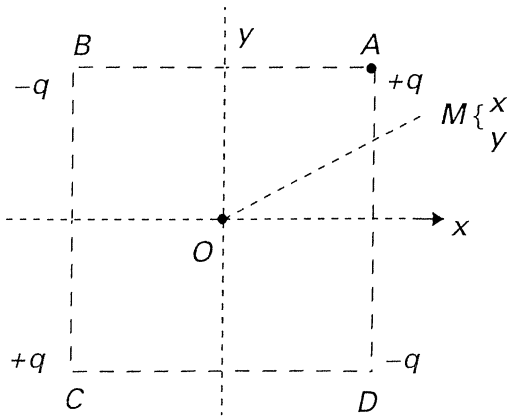
soit : $$\boxed{V = \frac{qa^2(1 - 3\cos^2\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

On en déduit les composantes du champ :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{soit :} \quad \boxed{E_r = \frac{3qa^2(1 - \cos^2\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^4}}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{soit :} \quad \boxed{E_\theta = -\frac{6qa^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}}$$

05 -



Repérons le point par ses coordonnées cartésiennes x, y dans le repère défini ci-dessus.
Le potentiel en M est :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 AM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 BM} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 CM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 DM}$$

soit : $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{CM} - \frac{1}{DM}\right]$$

or, $$AM^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2a^2$$

soit : $$AM^2 = (x^2+y^2)\left[1 - 2a\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{2a^2}{x^2+y^2}\right]$$

donc : $$\frac{1}{AM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 - 2a\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{2a^2}{x^2+y^2}\right]^{-1/2}$$

Comme x et y sont très grands devant a, développons au second ordre en $\frac{a}{x}$ ou $\frac{a}{y}$:

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 + a\,\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{a^2}{x^2+y^2} + \frac{3}{2}\,\frac{a^2(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

De même :

$$BM^2 = (x+a)^2 + (y-a)^2 = x^2 + y^2 - 2a(y-x) + 2a^2$$

Il suffit donc de changer x en $-x$:

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 + a + \frac{-x+y}{x^2+y^2} - \frac{a^2}{x^2+y^2} + \frac{3}{2}\,\frac{a^2(-x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

De même :

$$CM^2 = (x+a)^2 + (y+a)^2 = x^2 + y^2 - 2a(-y-x) + 2a^2$$

Il suffit de changer x en $-x$ et y en $-y$:

$$\frac{1}{CM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 + a + \frac{-x-y}{x^2+y^2} - \frac{a^2}{x^2+y^2} + \frac{3}{2}\,\frac{a^2(-x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Enfin :

$$DM^2 = (x-a)^2 + (y+a)^2 = x^2 + y^2 - 2a(x-y) + 2a^2$$

Il suffit de changer y en $-y$:

$$\frac{1}{DM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 + a\,\frac{x-y}{x^2+y^2} - \frac{a^2}{x^2+y^2} + \frac{3}{2}\,\frac{a^2(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

D'où il reste toutes simplifications faites :

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{CM} - \frac{1}{DM} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{12a^2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

et donc : $$\boxed{V = \frac{12qa^2xy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}}$$

Prenons les coordonnées polaires r, θ :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Donc : $$V = \frac{12qa^2r^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

soit : $$\boxed{V = \frac{6qa^2\sin 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

On en déduit les composantes du champ électrostatique

– en coordonnées cartésiennes

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{soit :} \quad \boxed{E_x = -\frac{12qa^2y(y^2-4x^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{7/2}}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{soit :} \quad \boxed{E_y = -\frac{12qa^2x(x^2-4y^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{7/2}}}$$

– en coordonnées polaires

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{soit :} \quad \boxed{E_r = \frac{18qa^2\sin 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{soit :} \quad \boxed{E_\theta = -\frac{12qa^2\cos 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}}$$

Surfaces équipotentielles

Les équations polaires des intersections des surfaces équipotentielles avec le plan sont données par :

$$\frac{\sin 2\theta}{r^3} = Cte \quad \text{soit} \quad \boxed{r^3 = C\sin 2\theta}$$

Lignes de champ

Les équations des lignes de champ sont données par

$$\frac{dr}{E_r} = -\frac{rd\theta}{E_\theta}$$

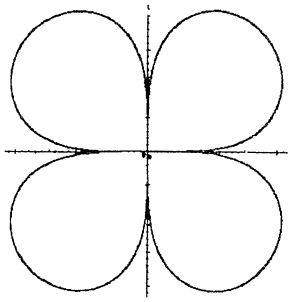
en coordonnées polaires. Donc :

$$\frac{dr}{3\sin 2\theta} = -\frac{rd\theta}{2\cos 2\theta}$$

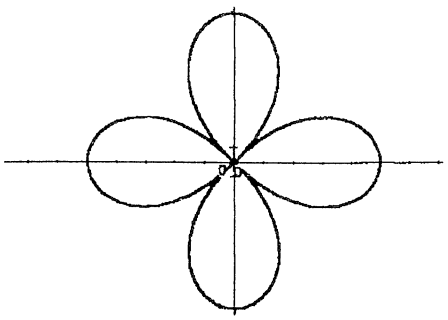
d'où en intégrant :

$$\boxed{r^4 = k|\cos 2\theta|^3}$$

On a représenté ci-dessous les allures d'une ligne équipotentielle et d'une ligne de champ.



Ligne équipotentielle



Ligne de champ

06 - Posons :

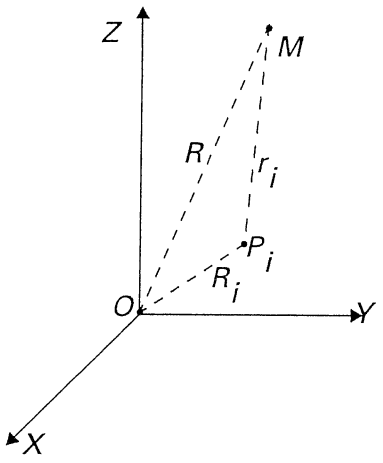
$$MP_i = r_i$$

On a

$V_i = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$ en supposant le potentiel coulombien.

Donc :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$



En posant :

$$\overrightarrow{MP_i} = \vec{r_i},\ \overrightarrow{OM} = \vec{R},\ \overrightarrow{OP_i} = \vec{R_i}$$

il vient $\vec{r_i} = \vec{R_i} - \vec{R}$

donc $r_i^2 = R_i^2 + R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{R_i}$

ou $$\frac{1}{r_i} = (R_i^2 + R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{R_i})^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2\vec{R}\cdot\vec{R_i}}{R^2} + \frac{R_i^2}{R^2}\right)^{-1/2}$$

Développons $\dfrac{1}{r_i}$ suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit $\dfrac{R_i}{R}$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R}\left[1 + \frac{\vec{R}\cdot\vec{R_i}}{R^2} - \frac{R_i^2}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{R}\cdot\vec{R_i})^2}{R^4} - \frac{3}{2}\frac{(\vec{R}\cdot\vec{R_i})R_i^2}{R^4} + \frac{5}{2}\frac{(\vec{R}\cdot\vec{R_i})^3}{R^6} + \dots\right]$$

D'où :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sum_{i=1}^{n} q_i\vec{R_i} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\sum_{i=1}^{n} -q_i R_i^2 + 3q_i\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{R_i}}{R}\right)^2 + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 R^5}\sum_{i=1}^{n} -3q_i R_i^2(\vec{R}\cdot\vec{R_i}) + 5\frac{q_i(\vec{R}\cdot\vec{R_i})^3}{R^2} + \dots$$

Cas particuliers

a) $\Sigma q_i \neq 0$

On néglige tous les termes en R_i. Il reste :

$$\boxed{V \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \sum_{i=1}^{n} q_i}$$

Le potentiel est identique à celui d'une charge unique $\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$ placée en O. La distribution est dite *polaire.*

b) $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{R}_i \neq 0$

Le potentiel est sensiblement égal à

$$\boxed{V \approx \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{R}_i\right) \cdot \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

En posant $\boxed{\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{R}_i = \vec{P}}$ il vient : $\boxed{V \approx \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$

Le potentiel est identique à celui d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{R}i$ placé en O.

La distribution est dite *dipolaire.*

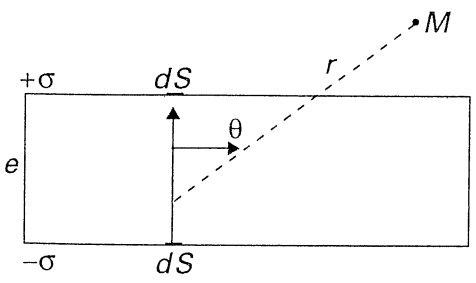
c) $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{R}_i = 0$

Le potentiel est sensiblement égal à :

$$\boxed{V \approx \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \sum_{i=1}^{n} 3q_i \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{R}_i}{R}\right)^2 - q_i R_i^2}$$

La distribution est dite *quadripolaire.*

07 - Soient deux éléments de surface dS du disque situés comme sur la figure ci-contre. Les deux charges $-\sigma dS$ et $+\sigma dS$ constituent un dipôle élémentaire de moment $dp = \sigma dSe$. Le potentiel élémentaire créé en M est alors :



$$dV = \frac{dp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma e dS\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Or, $\frac{dS\cos\theta}{r^2}$ représente l'angle solide élémentaire $d\Omega$ sous lequel de M on voit le disque. D'où

$$\boxed{V = \frac{\sigma e \Omega}{4\pi\varepsilon_0}}$$

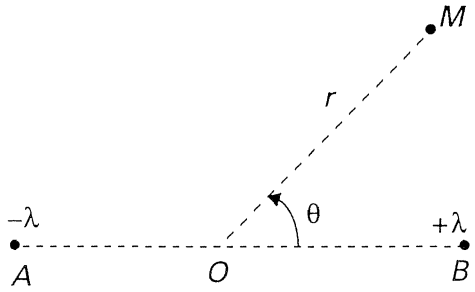
Ω étant l'angle solide sous lequel de M on voit le disque.

08 - D'après le résultat de l'exercice 9, chapitre 4,

$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{AM}{BM} + Cte$.

En O, $AO = BO$, $V = 0$ d'où $Cte = 0$

donc $V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{AM}{BM}$



Or, $AM = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} + a r\cos\theta}$, $BM = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - a r\cos\theta}$

d'où $$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r^2 + a r\cos\theta + \frac{a^2}{4}}{r^2 - a r\cos\theta + \frac{a^2}{4}}$$

soit : $$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)\right].$$

En développant au premier ordre en $\frac{a}{r}$, il vient :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{r}\cos\theta$$

ou enfin : $$\boxed{V = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

2 – La composante radiale E_r de $\vec{E}$ est

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

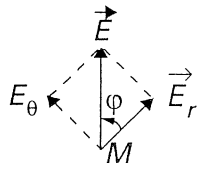
La composante orthoradiale E_θ de $\vec{E}$ est :

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\lambda a\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

On en déduit :

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{\lambda_a}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

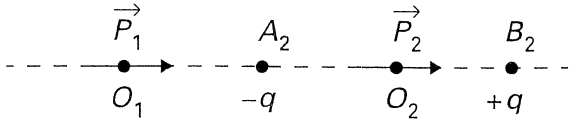
et $\tan\varphi = \dfrac{E_\theta}{E_r} = \tan\theta$, donc $\varphi = \theta$



$$E_r = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\ ,\ E_\theta = \frac{\lambda a\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\ ,\ \varphi = \theta$$

09 -



Le champ créé par $\vec{p}_1$ en A_2 est :

$$\vec{E}_1 = \frac{2\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0\left(D-\frac{a}{2}\right)^3}.$$

Le champ créé par $\vec{p}_1$ en B_2 est :

$$\vec{E}'_1 = \frac{2\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0\left(D+\frac{a}{2}\right)^3}.$$

La résultante des forces agissant sur le second dipôle est :

$$\vec{f} = -q\vec{E}_1 + q\vec{E}'_1\ .$$

Soit : $$\vec{f} = q\left[\frac{2\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0\left(D+\frac{a}{2}\right)^3} - \frac{2\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0\left(D-\frac{a}{2}\right)^3}\right]$$

ou $$\vec{f} = \frac{2q\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(D+\frac{a}{2}\right)^{-3} - \left(D-\frac{a}{2}\right)^{-3}\right].$$

Or : $$\left(D+\frac{a}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{D^3}\left[1+\frac{a}{2D}\right]^{-3} \approx \frac{1}{D^3}\left[1-\frac{3a}{2D}\right]$$

et $$\left(D-\frac{a}{2}\right)^{-3} \approx \frac{1}{D^3}\left[1+\frac{3a}{2D}\right].$$

Donc $$\vec{f} = \frac{2q\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 D^3}\left(1-\frac{3a}{2D}-1-\frac{3a}{2D}\right)$$

soit : $$\vec{f} = -\frac{2q\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 D^3}\cdot\frac{3a}{D}$$

Comme $p_2 = aq$

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{6p_2\vec{p_1}}{4\pi\varepsilon_0 D^4}}$$

10 -

Le calcul est identique à celui de l'exercice 9. On a de plus $\vec{p_2} = \alpha\vec{E}$

avec $$\vec{E} = \frac{2\vec{p_1}}{4\pi\varepsilon_0 D^3}$$

donc $$\vec{f} = -\frac{6\vec{p_1}}{4\pi\varepsilon_0 D^4}\cdot\frac{2\alpha p_1}{4\pi\varepsilon_0 D^3}$$

soit : $$\vec{f} = -\frac{12\alpha p_1\vec{p_1}}{(4\pi\varepsilon_0)^2 D^7}$$

Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction $\vec{p_1}$, cette force s'écrit aussi

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{3\alpha p_1^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 D^7}\vec{u}}$$

6 ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UN SYSTÈME DE CHARGES

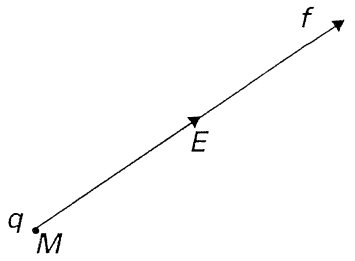
1. Énergie électrostatique d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique extérieur
2. Énergie d'un système de charges ponctuelles en nombre fini
3. Énergie d'une distribution continue de charges
4. Énergie électrostatique d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur

1 - ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UNE CHARGE PONCTUELLE DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE EXTÉRIEUR

Soit une charge ponctuelle q est placée dans un champ électrostatique prenant la valeur de $\vec{E}$ au point M où est la charge. Celle-ci est soumise à une force électrostatique :

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

Considérons un déplacement $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$ du point M. Le travail de la force $\vec{f}$ au cours du déplacement est :



$$dW = \vec{f}.\overrightarrow{dl} = q\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Or, d'après la relation entre champ et potentiel :

$$\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV$$

dV étant la variation du potentiel électrostatique entre M et M'. Donc :

$$dW = -qdV = d(-qV)$$

On peut aussi définir une **énergie potentielle électrostatique** ε par :

$$dW = -d\mathscr{E}$$

Une identification entre les deux expressions de dW nous conduit à :

$\mathscr{E} = qV +$ **constante**

On prendra $\mathscr{E} = 0$ à l'infini s'il n'y a pas de charges à l'infini. Dans ce cas, d'après la convention du potentiel coulombien, $V = 0$ à l'infini. D'où : $\boxed{\mathscr{E} = qV}$

2 - ÉNERGIE D'UN SYSTÈME DE CHARGES PONCTUELLES EN NOMBRE FINI

Considérons un ensemble de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$ placées en des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Chacune de ces charges ponctuelles est soumise à l'action du champ électrostatique créé par toutes les autres. L'ensemble de ces charges en présence possède une énergie électrostatique que nous allons calculer.

On part de l'espace vide et l'on amène de l'infini la charge q_1 jusqu'en A_1 : l'opérateur ne fournit aucune énergie.

On amène depuis l'infini la charge q_2 en A_2. En ce point A_2 règne le potentiel :

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \text{ avec } r_{12} = A_1A_2$$

créé par q_1. La charge q_2 acquiert une énergie potentielle :

$$q_2 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

La charge q_1 étant en A_1, la charge q_2 étant en A_2, on amène depuis l'infini la charge q_3 en A_3. En ce point, A_3 règne le potentiel :

$$V_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

avec $r_{13} = A_1A_3$, $r_{23} = A_2A_3$. La charge q_3 acquiert une énergie :

$$q_3 V_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}.$$

On réalise la même opération pour toutes les autres charges. On obtient l'énergie totale du système en faisant la demi-somme :

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ provient du fait que le même terme $\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$ est compté deux fois, selon qu'on se place du point du point de vue de q_1 ou de celui de q_j : il en est alors de même de l'énergie mutuelle.

L'énergie ci-dessus peut aussi s'écrire :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \right).$$

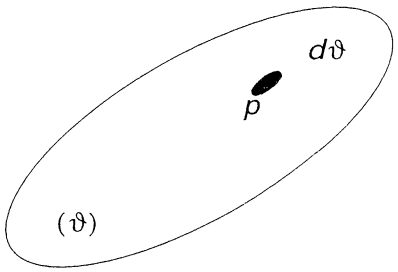
Or, $\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$ est le potentiel de V_i créé en A_i par toutes les **autres charges**. Donc :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

3 - ÉNERGIE D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

1. Distribution volumique

Soit une distribution volumique de charges à l'intérieur d'un volume ($\mathscr{V}$). Soit un élément de volume $d\mathscr{V}$ centré en P où la densité volumique de charges est ρ : l'élément de volume $d\mathscr{V}$ porte la charge $dq = \rho d\mathscr{V}$.



Soit V le potentiel en P dû à toutes les autres charges (sauf celles de $d\mathscr{V}$).

Pour calculer l'énergie électrostatique de la distribution, on imagine que l'on part du volume ($\mathscr{V}$) non chargé et que l'on apporte successivement des charges élémentaires de façon à aboutir à l'état final. Considérons un instant quelconque de la charge où l'élément de volume $d\mathscr{V}$ porte une charge $dq' = \lambda dq \; (0 \leq \lambda \leq 1)$ et où le potentiel en P est λV .

Apportons sur cet élément de volume une charge élémentaire $d^2q' = \rho d\lambda d\mathscr{V}$: cette charge passe du potentiel 0 à l'infini au potentiel λV en P : elle acquiert donc une énergie électrostatique :

$$d^2\mathscr{E} = d^2q' (\lambda V) = \rho d\lambda d\mathscr{V} (\lambda V)$$

L'élément de volume $d\mathscr{V}$ possèdera en fin de charge l'énergie :

$$d\mathscr{E} = \int_0^1 (\rho d\mathscr{V} \cdot V) \lambda d\lambda$$

$$d\mathscr{E} = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot d\mathscr{V}$$

Le volume ($\mathscr{V}$) possède, par conséquent, l'énergie :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \rho V d\mathscr{V}$$

2. Distribution surfacique

Par un calcul similaire, σ étant la densité surfacique de charges en P, centre de l'élément de surface dS :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \iint_{(S)} \sigma . V . dS$$

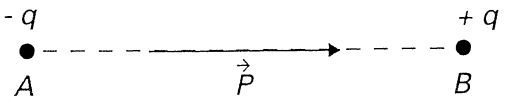
3. Distribution linéique

Avec des notations évidentes :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\int_{(\Gamma)} \lambda . V . dl$$

4 - ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UN DIPÔLE DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE EXTÉRIEUR

Soit un dipôle AB de moment dipolaire $\vec{p}$ placé dans un champ électrostatique extérieur (c'est-à-dire non créé par les charges $-q$ et $+q$ du dipôle) dérivant du potentiel V en A et $V + dV$ en B. L'énergie du dipôle est :



$$\mathscr{E} = -qV + q(V + dV) = qdV$$

Or, la distance $l = AB$ étant toujours très faible, on peut écrire, avec $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$:

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{l}$$

On en déduit :

$$\mathscr{E} = -q\vec{E} \cdot \vec{l}$$

Comme $q\vec{l} = \vec{p}$, moment dipolaire :

$$\mathscr{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

EXERCICES-TYPES

01 - ÉNERGIE D'UN ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES SUR UNE LIGNE

On considère un ensemble **très grand** de N charges $+q$ et N charges $-q$ placées sur une ligne $x'Ox$ à des distances égales a.

Calculer l'énergie électrostatique du système.

02 - ÉNERGIE D'UN ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES AUX SOMMETS D'UN CUBE

On considère un ensemble de charges $+q$ et $-q$ placées alternativement aux sommets d'un cube de sommet a.

Calculer l'énergie électrostatique du système.

03 - ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN VOLUME

Calculer l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon R portant une densité volumique de charges uniforme ρ.

04 - ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN SURFACE

Une sphère de rayon R porte une charge uniformément repartie sur sa surface avec la densité σ.

Calculer son énergie électrostatique.

05 - L'ACTION D'UN DIPÔLE SUR UN ION

On considère un ion supposé sphérique de charge q, de rayon r. Dans le champ de cet ion est placé un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p}$. Calculer la force exercée par l'ion sur le dipôle. Faire l'application numérique dans le cas de l'ion Al^{3+} $(r = 57\,pm)$ et la molécule d'eau $(p = 1,81\,D)$.

06 - ÉNERGIE MUTUELLE DE DEUX DIPÔLES

En un point O est placé un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\overrightarrow{p_1}$. En un point M repéré par $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ est placé un deuxième dipôle électrostatique de moment dipolaire $\overrightarrow{p_2}$. On se place dans le cas où la distance r est très grande devant les dimensions des deux dipôles.

Calculer l'énergie électrostatique mutuelle des deux dipôles en fonction de $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{r}, r, \varepsilon_o$.

INDICATIONS

01 - 02 - Prendre une charge quelconque comme origine. Calculer le potentiel dans lequel elle est placée.

03 - Apporter des charges depuis l'infini.

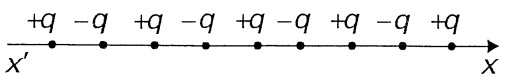
04 - Le potentiel de la sphère est constant. Le calculer. En déduire l'énergie.

05 - Calculer l'énergie potentielle. En déduire la force.

06 - Développer le gradient comme à l'exercice 3 du chapitre 5 mais en coordonnées polaires.

SOLUTIONS

01 - Comme il y a un très grand nombre de charges, on peut prendre l'origine O en n'importe quel point de l'axe et considérer, pratiquement, qu'il y a un nombre infini de charges $+q$ et $-q$. Le potentiel créé en O par l'ensemble des autres charges est :



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{2}{a}+\frac{2}{2a}-\frac{2}{3a}+\ldots\right] = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_o a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)$$

L'énergie de la charge placée en O sera donc :

$$\mathscr{E}_o = qV = -\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_o a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)$$

Or, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots = \ln 2$ quand N est très grand.

L'énergie totale du système sera

$$\mathscr{E} = N\mathscr{E}_o$$

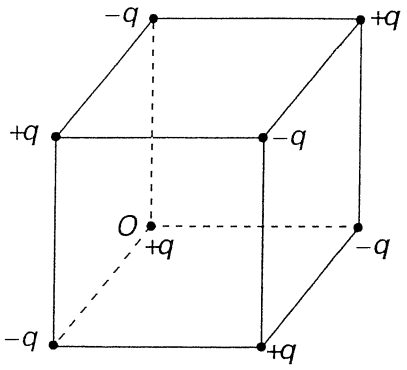
soit :

$$\boxed{\mathscr{E} = -\frac{Nq^2}{2\pi\varepsilon_o a}\ln 2}$$

02 - Le potentiel créé en O par les autres charges est :

$$V = 3\left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_o a}\right)+3\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{2}a}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o a\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o a}\left[-3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$



L'énergie de la charge $+q$ placée en O est donc :

$$\mathscr{E}_o = qV = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o a}\left[-3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Toutes les charges possèdent la même énergie. L'énergie totale du système est donc :

$$\mathscr{E} = 4\,\mathscr{E}_o$$

soit :

$$\mathscr{E} = \frac{q^2}{\pi\,\mathscr{E}_o a}\left[-3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

ou $$\boxed{\mathscr{E} = -0{,}3\,\frac{q^2}{\pi \mathscr{E}_o a}}$$

03 - On utilisera la même méthode qu'au paragraphe 3. Soit une sphère de rayon x. Elle porte la charge :

$$q = \frac{4}{3}\pi x^3 . \rho$$

Son potentiel est :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o x} = \frac{\rho x^2}{3\varepsilon_o}$$

Apportons de l'infini sur cette sphère une charge dq :

$$dq = 4\pi x^2 \rho\, dx$$

Elle passe du potentiel O à l'infini au potentiel v sur la sphère. L'énergie potentielle de la sphère s'accroît donc de $d\mathscr{E}$:

$$d\mathscr{E} = v\,dq = \frac{\rho x^2}{3\varepsilon_o} . 4\pi x^2 \rho\, dx$$

$$d\mathscr{E} = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_o} x^4 dx$$

Quand la sphère est chargée, x a varié de O à R donc :

$$\mathscr{E} = \int_{x=O}^{x=R} d\mathscr{E} = \frac{4\pi\rho^2}{3\mathscr{E}_o}\left[\frac{x^5}{5}\right]_O^R$$

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\mathscr{E}_o}}$$

04 - L'énergie est :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\iint \sigma V dS$$

V est le potentiel créé en un point de la surface par les charges autres que celle de dS.

En un point intérieur à la sphère, il est facile de vérifier (par le théorème de Gauss) que le champ est nul. On peut calculer le potentiel qui est constant au centre O de la sphère

$$V_o = \frac{Q}{4\pi\mathscr{E}_o R} = \frac{\sigma R}{\mathscr{E}_o}$$

Pour continuité, on en déduit que le potentiel en un point de la surface est aussi V_o.

L'énergie est donc :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\sigma R}{\mathscr{E}_o}\right)\iint dS$$

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\sigma R}{\mathscr{E}_o}\right)4\pi R^2$$

soit : $\boxed{\mathscr{E} = \dfrac{2\pi\sigma^2 R^3}{\mathscr{E}_o}}$

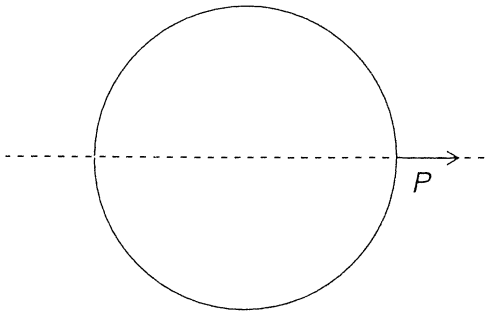
Le dipôle est placé dans le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ion. Ce champ est inhomogène sur le dipôle.

Le dipôle sera soumis à un couple de moment $\vec{P} \wedge \vec{E}$ tendant à orienter le moment dipolaire $\vec{p}$ parallèlement à $\vec{E}$ et de même sens. Il sera ensuite soumis à une force de la forme $\vec{f} = \overrightarrow{-\text{grad}}\ \mathscr{E}$ où $\mathscr{E}$ est l'énergie potentielle du dipôle dans le champ.

Comme $\mathscr{E} = -\vec{p}.\vec{E}$

$$\mathscr{E} = -\frac{p.q}{4\pi\mathscr{E}_o r^2}$$

d'où $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{pq}{2\pi\mathscr{E}_o r^3}\vec{u}_r}$



Commentaire

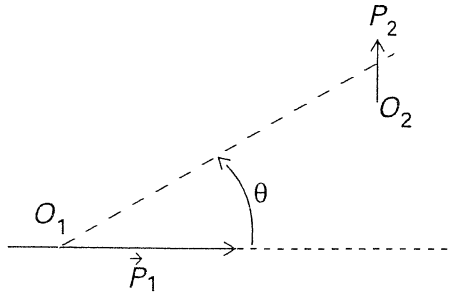
C'est une force attractive. C'est normal puisque, avec l'orientation de $\vec{p}$, la charge $-q$ est plus proche de l'ion que la charge $+q$.

06 - Soit $\vec{E}_1$ le champ électrostatique créé en O_2 par le dipôle de moment $\vec{p}_1$. L'énergie potentielle du dipôle de moment $\vec{p}_2$ dans ce champ est

$$W = -\vec{p}_2.\vec{E}_1$$

Or, $\vec{E}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{\vec{p}_1.\vec{r}}{4\pi\mathscr{E}_o r^3}$

en posant $\vec{r} = \overrightarrow{O_1O_2}$.



On peut calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{\vec{p}_1.r}{4\pi\mathscr{E}_o r^3}$ en prenant, par exemple, les coordonnées polaires. On peut aussi utiliser la formule d'analyse vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}_1.\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = (\vec{p}_1.\overrightarrow{\text{grad}})\frac{\vec{r}}{r^3} + \left(\frac{\vec{r}}{r^3}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{p}_1 + \vec{p}_1 \wedge \left(\text{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}\right) + \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{p}_1)$$

Comme $\vec{p}_1$ est constant, il reste :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}_1.\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = (\vec{p}_1.\overrightarrow{\text{grad}})\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}_1 \wedge \text{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}\ .$$

Comme $\text{rot}\dfrac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$ il vient $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}_1.\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right) = (\vec{p}_1.\overrightarrow{\text{grad}})\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

Plaçons-nous en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}_1.\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left[\left(\vec{p}_1\cos\theta\ \vec{u}_r + \vec{p}_1\sin\theta\ \vec{u}_\theta\right).\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u}_\theta\right)\right]\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= p_1\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= p_1\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{u}_r}{r^2}\right) + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\vec{u}_r}{r^2}\right]$$

$$= p_1\left[\cos\theta\left(-\frac{2}{r^3}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{1}{r^2}\vec{u}_\theta\right]$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}_1.\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = p_1\left[-\frac{2}{r^3}\cos\theta\ \vec{u}_r + \frac{1}{r^3}\sin\theta\ \vec{u}_\theta\right]$$

or, $\vec{p}_1 = p_1\cos\theta\ \vec{u}_r + p_1\sin\theta\ \vec{u}_\theta$, donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}_1.\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{2p_1\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{1}{r^3}\left(\vec{p}_1 - p_1\cos\theta\ \vec{u}_r\right)$$

$$= -\frac{3p_1\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\vec{p}_1}{r^3} = -\frac{3(\vec{p}_1.\vec{r})}{r^4} + \frac{\vec{p}_1}{r^3}$$

et donc finalement :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3\vec{p}_1.\vec{r}}{r^4}\vec{u}_r - \frac{\vec{p}_1}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[3\frac{\vec{p}_1.\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3}\right].$$

On en déduit donc :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{\vec{p}_1.\vec{p}_2}{r^3} - 3\frac{\vec{p}_1.\vec{r}}{r^5}(\vec{p}_2.\vec{r})\right]$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left[\vec{p}_1.\vec{p}_2 - \frac{3(\vec{p}_1.\vec{r})(\vec{p}_2.\vec{r})}{r^2}\right]$$

PARTIE 2

MAGNÉTOSTATIQUE DANS LE VIDE

7 FORCES MAGNÉTIQUES

1. Actions exercées par des charges ponctuelles en mouvement sur une charge ponctuelle elle-même en mouvement
2. Loi de Laplace
3. Balance de Cotton
4. Effet Hall

On va, dans cette deuxième partie de l'ouvrage, s'intéresser aux effets magnétiques du courant continu parcourant des circuits électriques fixes.

C'est le domaine de la *magnétostatique*. Nous nous placerons dans le *vide*, ou ce qui revient au même, dans l'air.

1 - ACTIONS EXERCÉES PAR DES CHARGES PONCTUELLES EN MOUVEMENT SUR UNE CHARGE PONCTUELLE ELLE-MÊME EN MOUVEMENT

On a vu en électrostatique que, si toutes les charges ponctuelles sont au repos, elles créent en un point M où est placée la charge ponctuelle q, elle-même au repos, un champ électrostatique $\vec{E}$ et la charge q est alors soumise à une force $\vec{f} = q\vec{E}$.

Lorsque toutes les charges sont en mouvement, la force subie par la charge q n'a pas une expression aussi simple. On montre que la force totale subie par la charge q comporte deux composantes :

– une **force électrique**, analogue à la force électrostatique de la forme $\vec{f}_1 = q\vec{E}$ où le champ électrique $\vec{E}$ est indépendant de la charge q ;

– une **force magnétique** due en particulier au mouvement de la charge q de la forme $\vec{f}_2 = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de la charge q et $\vec{B}$ un vecteur appelé **champ magnétique** créé par toutes les charges en mouvement autres que q au point où est placée la charge q à l'instant t.

La force totale agissant sur la charge q lorsque elle-même et les autres charges sont en mouvement sera donc :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

Cette force s'appelle **force de Lorentz**.

On posera cette relation comme **Principe fondamental de la magnétostatique** ; la magnétostatique étant l'étude des effets magnétiques des courants constants. Dans ce cas, le champ magnétique est souvent appelé champ magnétostatique.

Insistons sur le fait que le champ magnétique $\vec{B}$ est créé par toutes les charges en mouvement **autres** que la charge q.

Remarque

L'étude des aimants naturels ou artificiels montre que, du point de vue magnétique, on a une équivalence entre un circuit électrique fermé et un aimant. Autrement dit, un champ magnétique $\vec{B}$ peut être créé également par un aimant. Ainsi, une charge ponctuelle q, placée au voisinage d'un aimant et animée d'une vitesse $\vec{v}$, sera soumise à une force magnétique de la forme $q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Dans toute la suite de ce chapitre, on s'intéressera aux circuits électriques traversés par des courants continus. Dans ces conditions, la force de Lorentz se réduit en pratique à la force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$, le terme $q\vec{E}$ étant négligeable devant $q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Le champ magnétique $\vec{B}$ est un **vecteur axial**. Il est aussi appelé quelquefois induction magnétique (cette appellation n'est pas recommandable).

2 - LOI DE LAPLACE

Soit un circuit (C) filiforme (les dimensions transversales étant négligeables devant la longueur) parcouru par un courant continu d'intensité I.

Supposons ce circuit placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ créé soit par un autre circuit, lui-même parcouru par un courant continu d'intensité I', soit par un aimant (champ magnétique extérieur).

Le courant continu I est dû au déplacement des électrons libres du métal de charge $-e\,(e = 1{,}6.10^{-19}C)$ animés de vitesses $\vec{v}$. Sur chacun des électrons agit une force magnétique de la forme $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_T$ où $\vec{B}_T$ est le champ magnétique total existant au point où est cet électron. Ce champ $\vec{B}_T$ est la somme du champ extérieur $\vec{B}$ et du champ $\vec{B}'$ créé par tous les autres électrons mobiles du circuit (C). Or, on montre que ce champ $\vec{B}'$ est toujours négligeable devant le champ extérieur $\vec{B}$. Donc, un électron donné sera soumis à la force magnétique $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$, $\vec{B}$ étant le **champ magnétique extérieur.**

Considérons maintenant un élément de longueur $d\ell$ du circuit (C). Orientons $d\ell$ par le sens du courant d'intensité I le traversant. On appelle **élément de courant** le vecteur $I.\vec{d\ell}$. Soit dQ la charge totale des électrons mobiles contenus dans $d\ell$. On supposera que $\vec{B}$ ne varie pratiquement pas le long de $\vec{d\ell}$. Dans ces conditions, la force magnétique totale agissant sur l'ensemble des électrons contenus dans $\vec{d\ell}$ est :

$$\vec{df} = [\sum(-e\vec{v}) \wedge \vec{B}] = (dQ)\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

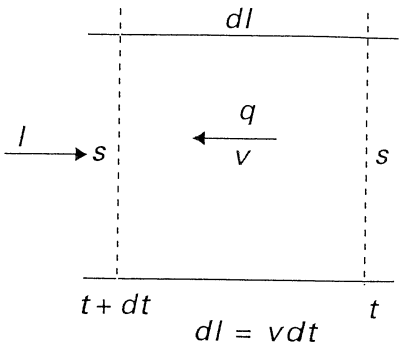
(On note $\vec{df}$ car c'est une force élémentaire puisqu'agissant sur un élément de courant).

Établissons la relation existant entre $I.\vec{d\ell}$ et $\vec{v}.dQ$. Considérons l'élément de longueur $d\ell$ du circuit. La charge totale contenue dans $d\ell$ est

$dQ = -S.vdt.N.e$, où N est le nombre d'électrons libres par unité de volume.

L'intensité du courant est égale au quotient de la charge traversant une section droite pendant un temps donné, par ce temps, donc :

$$I = \frac{dQ}{dt} = -NSv.e$$



Donc, $\vec{v}(\sum -e) = \vec{v}.dQ = \vec{v}.Idt = I.\vec{d\ell}$, soit :

$$\boldsymbol{I.\vec{d\ell} = \vec{v}.dQ}$$

On en déduit la force magnétique agissant sur l'élément de longueur $d\ell$ du conducteur, appelée **force de Laplace** :

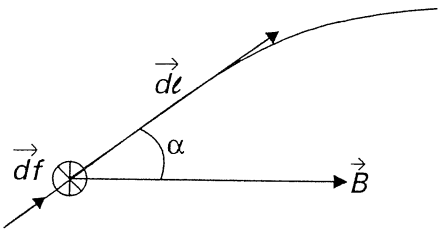
$$\boxed{\vec{dF} = I\vec{d\ell} \wedge \vec{B}}$$

L'expression ci-dessus constitue la **loi de Laplace**.

Caractéristiques de la force de Laplace

L'expression vectorielle de df montre que :

- $\vec{df}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{d\ell}$ et $\vec{B}$;
- le trièdre $\vec{d\ell}, \vec{B}, \vec{df}$ est direct.



Pour trouver le sens de $\vec{df}$, on peut utiliser l'une des règles du trièdre direct. Rappelons la **règle du bonhomme d'Ampère** : le bonhomme est placé sur le fil de sorte que le courant lui rentre par les pieds et lui sorte par la tête, il regarde dans la direction de $\vec{B}$, la direction de $\vec{df}$ est donnée par son bras gauche (on peut aussi utiliser la *règle du tire-bouchon* de Maxwell).

- le module de $\vec{df}$ est $\left|\vec{df}\right| = I.d\ell.B.\sin\alpha$, α étant l'angle entre $\vec{d\ell}$ et $\vec{B}$.

Remarque

Notons qu'il est possible d'isoler, en pratique, un élément de longueur $d\ell$ le long duquel $\vec{B}$ reste constant et de mesurer la force élémentaire agissant sur $d\ell$. Ainsi, la loi de Laplace, sous sa forme élémentaire, a un ***sens physique*** *(au contraire de la loi de Biot et Savart que l'on verra au chapitre suivant).*

Autre expression de la loi de Laplace

On peut exprimer aussi la loi de Laplace en utilisant le vecteur **densité de courant** $\vec{J}$. Soit ρ la densité volumique de charges mobiles contenues dans l'élément de conducteur de volume $d\mathcal{V} = S.d\ell$. La charge dQ mobile s'écrit :

$$dQ = \rho\, d\mathcal{V}$$

et la densité de courant $\vec{J}$ s'écrit : $\vec{J} = \rho\vec{\mathcal{V}}$

donc :

$$\vec{J} = \frac{dQ}{d\mathcal{V}}.\vec{v}$$

d'où :

$$\vec{v}.d\mathcal{Q} = \vec{J}.d\mathcal{V}$$

La loi de Laplace devient ainsi, en établissant la correspondance entre $I\,\vec{d\ell}$ et $\vec{J}.d\mathcal{V}$:

$$\boxed{d\vec{f} = (\vec{J} \wedge \vec{B})\, d\mathcal{V}}$$

La quantité $\frac{d\vec{f}}{d\mathcal{V}} = \vec{J} \wedge \vec{B}$ est couramment appelée **densité volumique de force magnétique**. Elle est valable pour un circuit massif.

Unités

Il est facile de vérifier que l'équation aux dimensions de B est :

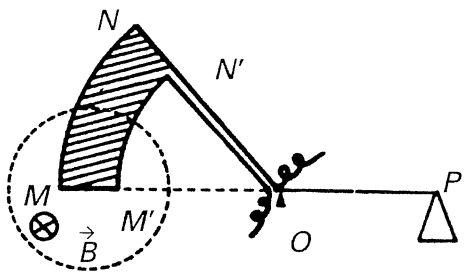
$$[B] = M.I^{-1}T^{-2}.$$

Un champ magnétique pourrait s'exprimer dans le Système International en $kg.A^{-1}.s^{-2}$. En fait, l'unité de champ magnétique est le **tesla** (T) ou le weber par mètre carré $(Wb.m^{-2})$, ces deux unités étant parfaitement équivalentes.

3 - BALANCE DE COTTON

Cet appareil, basé sur la loi de Laplace, sert à mesurer des champs magnétiques.

A. Description



La figure ci-contre schématise la balance de Cotton. L'axe de rotation de la balance est perpendiculaire aux fléaux en O, MN et $M'N'$ sont deux arcs de cercle de centre O.

L'ensemble $ON'NMM'N'O$ est formé de matière isolante. Un fil conducteur est fixé sur cette partie de la balance. Le courant arrive en O et en repart.

La partie OP constitue le deuxième fléau de la balance. Dans le plateau P, on place des masses marquées. Le brin de fil conducteur MM' ainsi que des parties quelconques des brins MN et $M'N'$ sont placés dans un champ magnétique que $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan $MNN'M'$.

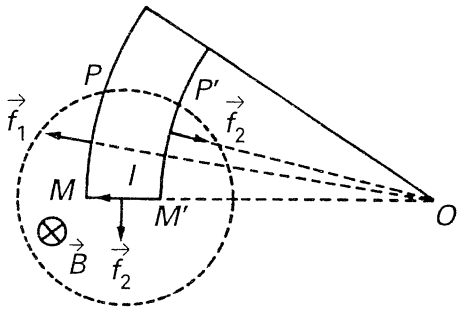
B. Condition d'équilibre

On fait passer le courant d'intensité I de façon que le fléau $MNM'N'O$ ait tendance à tourner vers le bas. On place alors dans le plateau P des masses marquées de somme m de sorte que la balance soit équilibrée.

Faisons l'inventaire des forces.

■ Dans le plateau *P*, les masses marquées ont un poids $\overrightarrow{mg}$. Ce poids est appliqué à une distance *d* de l'axe de rotation O. Son moment par rapport à l'axe de rotation est *mgd*.

■ Sur le brin *MM'* s'exerce une force de Laplace placée dans le plan de figure perpendiculaire à *MM'* de module $f = BI\ell$, en posant $\ell = MM'$.



■ Sur les brins *MP* et *M'P'* s'exercent des forces de Laplace $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ dont la caractéristique est que le support passe par O.

Si *d'* est la distance de O au milieu de *MM'* (point d'application de $\vec{f}$), le moment de toutes les forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation est $BI\ell d'$.

À l'équilibre, on a donc $BI\ell d' = mgd$, d'où :

$$B = \frac{mgd}{I\ell d'}$$

C. Utilisation de la balance

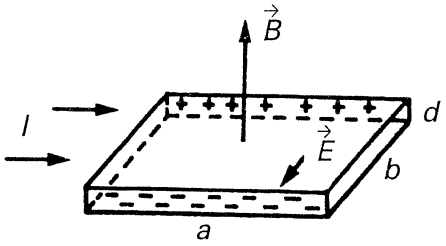
L'utilisation de la balance est limitée par la précision que l'on peut obtenir sur les différentes grandeurs intervenant ici.

En pratique, la balance n'est utilisable que pour la mesure de champs magnétiques relativement élevés : de quelques centièmes de teslas à quelques teslas.

4 - EFFET HALL

Cet effet, dont on va donner la description, est également utilisé pour la mesure de champs magnétiques.

Soit un ruban métallique plat de forme parallélépipédique de longueur *a*, de largeur *b*, d'épaisseur *d*. Ce ruban est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire aux grandes faces.



Le ruban est traversé suivant son épaisseur par un courant d'intensité *I* uniformément réparti.

On sait que dans un conducteur métallique, il y a des électrons libres. Dès que passe le courant *I*, ces électrons sont mis en mouvement (en sens contraire de *I*). En présence du champ magnétique, ces

électrons sont soumis à une force magnétique $\vec{f}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui les dévie de sorte que, dans le cas de figure ci-dessus, il y a accumulation d'électrons sur la face avant du ruban et défaut d'électrons sur la face arrière. Il apparaît donc une différence de potentiel U entre les deux faces du ruban et un champ électrique $\vec{E}$ de module $E = U/b$.

Les électrons arrivant ensuite seront soumis en plus à une force électrique $\vec{f}_e = -e.\vec{E}$. On arrivera très rapidement à un régime permanent dans lequel les électrons suivants seront soumis aux deux forces opposées $\vec{f}_m$ et $\vec{f}_e$. Donc, en régime permanent :

$$-e.\vec{E} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}, \text{ soit } \vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

En module, on aura donc :

$$E = v.B, \text{ soit } \frac{U}{b} = v.B$$

Or, on a vu en II, que :

$$I = -NSve$$

soit, $\vec{J}$ étant le vecteur densité de courant :

$$\vec{J} = -Ne\vec{v}$$

En valeur absolue, on a donc :

$$\frac{U}{b} = \frac{I}{NSe}B \text{ ou } U = \frac{b}{NSe}IB$$

Soit, finalement :

$$\boxed{U = KIB}$$

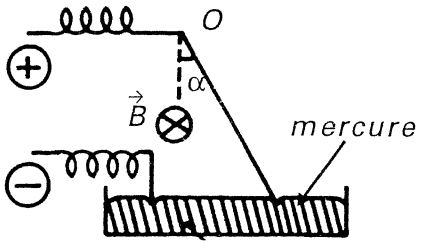
La constante K étant une caractéristique du matériau constituant le ruban (K dépend du nombre d'électrons libres N par unité de volume) et de la longueur du ruban.

La mesure de U,K, étant connue par une mesure préliminaire par exemple, permet de déterminer B lorsqu'on mesure par ailleurs I.

Inversement, les mesures de U et I (B étant connu), permettent de déterminer K, donc de connaître le nombre d'électrons libres par atome de métal.

EXERCICES-TYPES

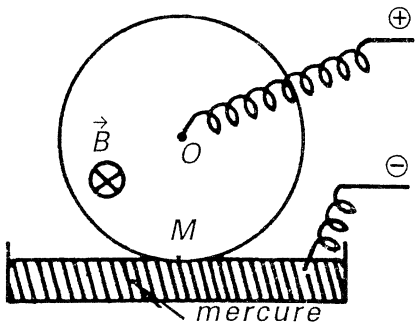
01 - PENDULE ÉLECTRIQUE



On considère un conducteur filiforme cylindrique rigide de longueur ℓ, de masse m mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire au fil en une de ses extrémités. L'autre extrémité affleure dans du mercure contenu dans une cuve. Un courant d'intensité I traverse le fil suivant le schéma ci-contre. Le fil est placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de figure. Calculer l'angle d'inclination α du fil.

02 - ROUE DE BARLOW

On considère une roue de Barlow schématisée ci-dessous.



Le rayon de la roue est R. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la roue.

On admettra que la roue n'est en contact avec le mercure qu'en un point M et que le courant ne traverse la roue que suivant le rayon OM.

Calculer :

1/ la force de Laplace résultante ;

2/ son moment par rapport à l'axe de rotation ;

3/ la puissance du moteur ainsi constitué lorsque la roue effectue n tours par seconde.

03 - ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME SUR UNE SPIRE.

On considère une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité I, mobile autour d'un de ses diamètres et placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.

Montrer que le système des forces magnétiques agissant sur la spire est équivalent à un couple dont le moment peut être mis sous forme $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, $\vec{M}$ étant un vecteur à déterminer, appelé **moment magnétique**.

04 - QUOTIENT MÈTRE

Deux cadres C_1 et C_2 perpendiculaires, identiques, sont mécaniquement solidaires et mobiles autour de leur axe commun vertical ZZ'. Ils sont placés dans un champ magnétique $\vec{B}$ horizontal.

Déterminer la relation entre les intensités i_1 et i_2 parcourant les deux cadres et l'angle α_1 du plan de C_2 avec B pour que le système soit en équilibre.

05 - OSCILLATIONS D'UN CIRCUIT

Un circuit de moment magnétique $\vec{M}$ horizontal est placé dans un champ magnétique horizontal $\vec{B}$. À l'équilibre $\vec{M}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires et de même sens. Le circuit est mobile autour d'un axe vertical. Soit J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. On l'écarte d'un angle α de sa position d'équilibre.

Calculer la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre. (Cet exercice utilise des résultats de Mécanique du programme PCSI ; il n'est donc pas faisable, en principe par les étudiants de MPSI).

06 – ASCENSION D'UN LIQUIDE ENTRE DEUX ÉLECTRODES

On considère deux électrodes métalliques de largeur a, de hauteur infinie parallèles, distantes de b. Avec deux parois isolantes et ces deux électrodes, on réalise un tube de section rectangulaire et d'axe vertical. Les deux électrodes sont soumises à une ddp V. On applique de plus un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme horizontal et parallèle aux électrodes. Par le bas du tube on fait arriver du mercure de masse volumique μ. Celui-ci est alors traversé par un courant d'intensité I connue.

1/ Décrire le phénomène.

2/ Calculer la hauteur du mercure à l'équilibre.

A.N. $a = 2\ cm$, $B = 2T$, $\mu = 13600\ kg.m^{-3}$,
$g = 9{,}81\ ms^{-2}$, $I = 1000$ A.

07 – EFFET HALL DANS UN CYLINDRE TOURNANT

Dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$, on place un cylindre métallique de rayon R, d'épaisseur d, dont l'axe est parallèle à $\vec{B}$.

On fait tourner ce cylindre à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe.

Calculer la différence de potentiel qui apparaît entre les deux faces du cylindre.

INDICATIONS

01 - Faire l'inventaire des forces et écrire l'égalité des moments à l'équilibre.

02 - Quel est le point d'application de la résultante des forces de Laplace.

03 - Calculer la résultante des forces de Laplace. Conclusion ?

04-05 - Utiliser le résultat de l'exercice 3.

06 - Faire l'inventaire des forces et écrire la condition d'équilibre.

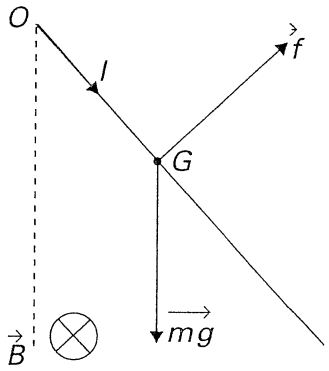
07 - Raisonner comme au paragraphe 4.

SOLUTIONS

01 - Le fil est soumis :

– à la force de Laplace $\vec{f}$;

– à son poids $\overrightarrow{mg}$.



Pour tous les éléments de longueur $d\ell$ du fil, les forces de Laplace élémentaires $\overrightarrow{df}$ sont perpendiculaires à celui-ci et de même sens.

Le module de $\overrightarrow{df}$ est $BId\ell$.

La résultante $\vec{f}$ a donc pour module $f = BI\ell$.

Par raison de symétrie, cette force est appliquée au milieu G du fil.

Son moment par rapport à l'axe de rotation est :

$$\mu_1 = f.\frac{\ell}{2} = \frac{BI\ell^2}{2}$$

Par ailleurs, le moment du poids par rapport à l'axe de rotation est :

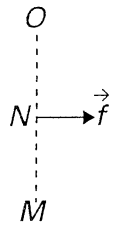
$$\mu_2 = mg.\frac{\ell}{2}.\sin\alpha$$

À l'équilibre, on a donc : $\frac{BI\ell^2}{2} = \frac{mg\ell}{2}\sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{BI\ell}{mg}$

donc $\boxed{\alpha = \text{arc sin}\frac{BI\ell}{mg}}$

02 - 1 – Un calcul identique à celui de l'exercice 1 donne la force de Laplace :

$\boxed{f = BIR}$



Avec les sens de I et $\vec{B}$ pris sur la figure de l'énoncé, la force $\vec{f}$ est perpendiculaire à OM, selon le sens ci-dessus et elle est appliquée par raison de symétrie au milieu N du rayon OM.

2 – Le moment de la force de Laplace par rapport à l'axe de rotation est donc : $\Gamma = f \cdot \frac{R}{2}$

soit : $\boxed{\Gamma = \frac{BIR^2}{2}}$

3 – Le travail de la force de Laplace au cours d'un tour est :

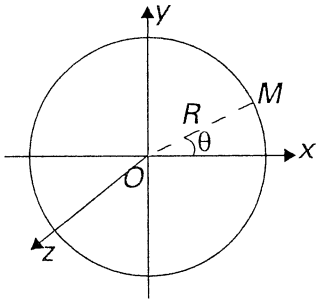
$$W = \Gamma.2\pi \text{ soit } W = \pi BIR^2$$

Pendant une seconde, la roue effectue n tours. Le travail est alors numériquement égal à la puissance. Donc

$$\boxed{P = n\,\pi\,BIR^2}$$

03 - On rapporte l'espace à un repère *Ox, Oy, Oz* défini comme ci-dessous.

On considère un élément de longueur *dl* de celui-ci. Cet élément est soumis à une force $\vec{df}$.



Soient B_x, B_y, B_z les composantes de $\vec{B}$

Celles de $\vec{df}$ sont alors :

$$\vec{df} \begin{cases} RB_z \cos\theta\, d\theta \\ RB_z \sin\theta\, d\theta \\ -RB_y \sin\theta\, d\theta - RB_x \cos\theta\, d\theta \end{cases}$$ sont alors

En intégrant sur θ entre 0 et 2π il vient : $\boxed{\vec{F} = 0}$

Le système des forces magnétiques ne peut donc qu'être équivalent à un couple.

Le moment $\vec{dC}$ de la force $\vec{df}$ est $\vec{dC} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{df}$. Ses composantes sont

$$\vec{dC} = IR^2 d\theta \begin{cases} -B_y \sin^2\theta - B_x \sin\theta\cos\theta \\ B_y \sin\theta\cos\theta + B_x \cos^2\theta \\ B_z \sin\theta\cos\theta - B_z \sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

En intégrant sur $[0, 2\pi]$, on obtient :

$$C = I\pi R^2 \begin{cases} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{cases}$$

Identifions cette expression avec celle que l'on obtient par développement du produit $\vec{M} \wedge \vec{B}$.

On obtient :

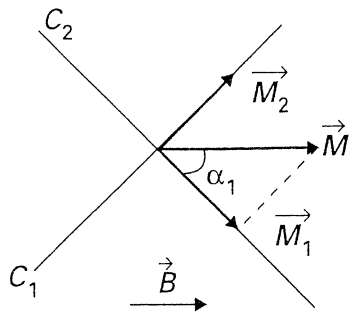
$$M_x = 0$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = \pi R^2 I$$

Le vecteur $\vec{M}$ est donc porté par l'axe perpendiculaire à la spire et a pour module I.S (*S* surface de la spire). Il est appelé moment magnétique de la spire (voir chapitre 9).

04 - Soient $\vec{M_1}$ et $\vec{M_2}$ les moments magnétiques des deux cadres C_1 et C_2.

On a :

$$\vec{C_1} = \vec{M_1} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{C_2} = \vec{M_2} \wedge \vec{B}$$



Le couple total auquel est soumis l'ensemble du système a pour moment :

$$\vec{C} = \vec{C_1} + \vec{C_2} = (\vec{M_1} + \vec{M_2}) \wedge \vec{B}$$

Le système est en équilibre si $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}$ est parallèle à $\vec{B}$, donc si $\tan\alpha_1 = \dfrac{M_2}{M_1}$

et comme $M_1 = i_1.S_T \quad M_2 = i_2.S_T$

S_T étant la surface totale de chaque cadre : $\boxed{\tan\alpha_1 = \dfrac{i_2}{i_1}}$

05 - Le circuit est soumis au couple de rappel de moment par rapport à l'axe.

$$C = -M.B.\sin\alpha$$

On écrit le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -MB\sin\alpha$$

Pour les petites oscillations : $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -\dfrac{MB}{J}\alpha.$

On a là l'équation différentielle d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω telle que : $\omega^2 = \dfrac{MB}{J}$

donc de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{MB}}}$

Cette formule permet d'effectuer :

– soit des mesures relatives de champs magnétiques ;

– soit des mesures relatives de moments magnétiques.

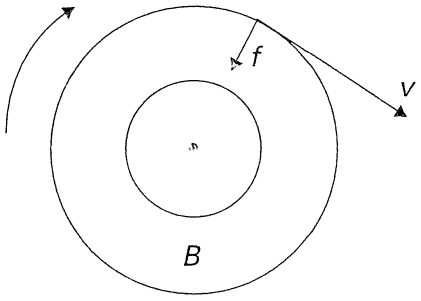
06 - 1 – Lorsque le courant passe, le liquide est soumis à une force de Laplace qui si $\vec{B}$ a un sens convenable, peut s'opposer au poids du liquide.

2 – À l'équilibre, la force de Laplace s'exerçant sur une hauteur h de liquide est égale au poids de la colonne de liquide (en modules). Or

$$F = BIb \qquad P = ahb\mu g$$

d'où $\boxed{h = \dfrac{BE}{a\mu g}}$ A.N. $\boxed{h = 0{,}75\text{ m}}$

07 - Le cylindre tournant est équivalent à un courant circulaire perpendiculaire à l'axe du cylindre dû aux électrons libres.



Un électron donné est soumis à une force $\vec{f}$ perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}$ donc radiale valant en module.

$f = evB$. Il y a donc accumulation d'électrons sur une face et défaut d'électrons sur l'autre d'où apparition d'une différence de potentiel U. Celle-ci crée alors un champ $\vec{E}$ ayant tendance à repousser les autres électrons.

À l'équilibre $evB = eE = e\dfrac{U}{d}$ d'où $U = dvB$

Or, $v = wR$, l'épaisseur d étant faible. D'où $\boxed{U = RdW\,B}$

8 CHAMP MAGNÉTIQUE

1. Loi de Biot et Savart
2. Remarque importante concernant la loi de Biot et Savart
3. Champ magnétique créé par une charge en mouvement
4. Définition de l'ampère
5. Théorème d'Ampère
6. Conservation du flux magnétique
7. Distribution de courants non filiformes
8. Topographie du champ magnétique
9. Symétries, antisymétries et invariances du champ magnétique
Annexe : le magnétisme terrestre

Lorsque deux circuits parcourus par des courants électriques constants sont placés au voisinage l'un de l'autre, ceux-ci sont soumis à des forces électromagnétiques de Laplace.

Chaque circuit crée dans l'espace entourant l'autre un champ magnétique $\vec{B}$ dont la direction, le sens et le module dépendent du point considéré.

Très généralement, lorsqu'un circuit est parcouru par un courant électrique, il crée dans son voisinage un champ magnétique. Tout **autre** circuit placé dans ce champ sera soumis à une force de Laplace.

Remarquons que la façon dont s'introduisent le champ magnétique et la force de Laplace implique que l'on ne considère pas l'action du champ magnétique créé par un circuit sur ce circuit lui-même.

Nous examinerons uniquement le cas où les circuits considérés sont parcourus par des **courants constants**, ces circuits étant immobiles et plongés dans le vide.

Rappelons que des aimants peuvent également créer en un point donné un champ magnétique. Nous ne nous en occuperons pas ici.

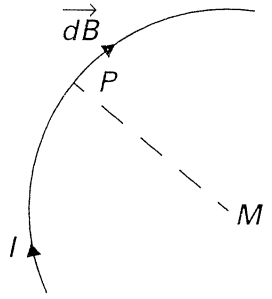
1 - LOI DE BIOT ET SAVART

Soit un circuit **filiforme** (les dimensions transversales des fils sont négligeables) parcouru par un courant continu d'intensité I.

Soit une portion infiniment petite $d\ell$ de ce fil assimilable à un segment. Soit le vecteur $\vec{dl}$ confondu avec ce segment et orienté dans le sens du courant. Soit P le point moyen de $\vec{dl}$. Soit M le point où l'on étudie le champ élémentaire créé par $\vec{dl}$. On pose $\overrightarrow{PM} = \vec{r}$.

La loi de Biot et Savart énonce que le champ magnétique $\vec{dB}$ créé par « l'élément du

courant » $I\vec{d\ell}$ en M est :



$$\boxed{\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\vec{d\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

Si l'on appelle $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\vec{r}$, $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, donc aussi :

$$\boxed{\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}}$$

μ_0 est une constante universelle valant **exactement**, dans le Système International :

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ SI}$$

μ_0 est appelée **perméabilité magnétique absolue du vide.**

L'expression vectorielle de $\vec{dB}$ signifie que :

– $\vec{dB}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{d\ell}$ et $\vec{r}$, donc au plan formé par $\vec{d\ell}$ et le point M ;

– son sens est tel que le trièdre $\vec{d\ell}$, $\vec{r}$, $\vec{dB}$ soit direct : on peut utiliser la *règle du bonhomme d'Ampère* ou la *règle du tire-bouchon de Maxwell* ;

– son module est $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell|\sin\theta|}{r^2}$ où θ est l'angle entre $\vec{d\ell}$ et $\vec{r}$;

– $\vec{dB}$ est un vecteur axial.

Unités

– Dans le Système International, dB s'exprime en **teslas** (T). Le tesla est aussi appelé weber par mètre carré. ($Wb \cdot m^{-2}$).

– $d\ell$ et r s'expriment évidemment en mètres.

– L'unité de μ_0 est le henry par mètre ($H \cdot m^{-1}$).

Remarque

La théorie électromagnétique de Maxwell (voir le cours de deuxième année) montre qu'entre ε_0, la permittivité diélectrique du vide, μ_0 et la célérité de la lumière dans le vide c, on a la relation :

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

En prenant $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ SI$ exactement, comme $c \approx 3{,}10^8\ ms^{-1}$, on voit que la valeur $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} SI$ de ε_0 n'est qu'approchée (mais néanmoins avec une excellente précision).

2 - REMARQUE IMPORTANTE CONCERNANT LA LOI DE BIOT ET SAVART

Physiquement, le champ magnétique $\overrightarrow{dB}$ créé par un élément de courant $\overrightarrow{d\ell}$ n'a aucun sens. En effet, il n'est pas possible d'isoler un élément $\overrightarrow{d\ell}$. Il y a nécessairement des fils d'arrivée et de départ du courant, lesquels créent au point M un champ qui se superpose à $\overrightarrow{dB}$. Le champ élémentaire $\overrightarrow{dB}$ n'est donc pas mesurable.

Seul aura donc un sens physique le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un circuit fermé (*C*).

$$\vec{B} = \oint_{(C)} \overrightarrow{dB}$$

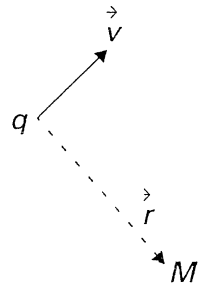
Signalons néanmoins que l'on peut être amené à calculer le champ magnétique créé par une portion seulement, non infinitésimale d'un circuit : ceci suppose soit que l'on ne s'occupe pas du tout du reste du circuit, soit que l'on néglige le champ créé au point considéré par le reste du circuit. Il est du reste possible en associant convenablement les fils d'arrivée et de départ du courant d'annuler pratiquement le champ magnétique créé en un point par ceux-ci.

3 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE CHARGE EN MOUVEMENT

On a vu, au chapitre 7, paragraphe 2, qu'une charge *q* animée d'une vitesse $\vec{v}$ est équivalente à un élément de courant $I\overrightarrow{d\ell}$:

$$\overrightarrow{qv} = I\overrightarrow{d\ell}$$

La loi de Biot et Savart nous donnera donc le champ magnétique créé par une charge *q* animée d'une vitesse $\vec{v}$ en un point *M* situé à la distance *r* :



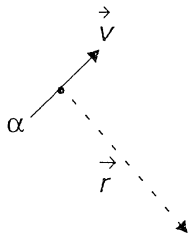
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Remarque

Pour une charge unique, le module du champ magnétique obtenu est extrêmement faible. Seul pourrait avoir une quelconque importance le champ créé par un très grand nombre de charges.

Exemple numérique

Cherchons le champ créé par une particule α (charge $+3{,}2{,}10^{-19} C$) se déplaçant à la vitesse de 20 000 kms^{-1} ($2{,}10^{7}$ ms^{-1}) passant à 1 cm de l'observateur. Nous prendrons égal à $\frac{\pi}{2}$ l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{v}$.



La formule ci-dessus conduit à

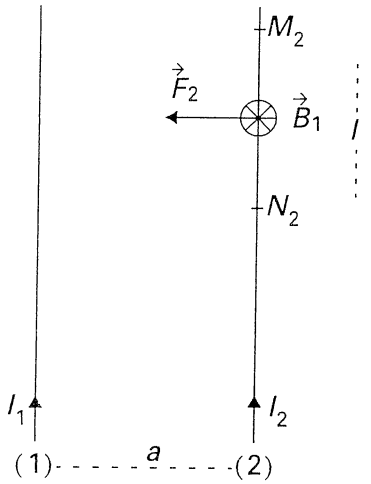
$B = 6{,}4{,}10^{-15}$ T.

Ce champ est parfaitement négligeable.

En revanche, à l'échelle de la matière, le champ créé par une particule n'est plus négligeable, au contraire (voir exercice 16).

4 - DÉFINITION DE L'AMPÈRE

Soient deux fils rectilignes indéfinis parallèles, distants de d et parcourus par des courants d'intensité I_1 et I_2.



Soit une portion de longueur ℓ du fil (2). Celle-ci est placée dans le champ magnétique créé par le fil (1). On montre (voir exercice 1) que, en tout point de (2), le champ $\vec{B}_1$ créé par le fil (1) est :

– perpendiculaire au plan formé par les deux fils ;

– dirigé dans le cas de figure ci-contre vers l'arrière de la feuille ;

– a pour module $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$.

La portion M_2N_2 de fil (2) est donc soumise à une force de Laplace perpendiculaire à M_2N_2, orientée de (2) vers (1) dans le cas de figure, de module $f_2 = B_1 I_2 \ell$, soit :

$$f_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 \ell}{2\pi a}.$$

L'ampère (A) est défini de la façon suivante :

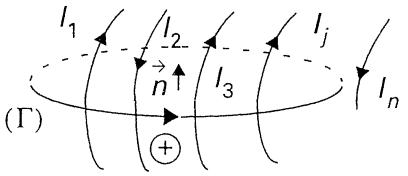
$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \text{ m} \\ \ell = 1 \text{ m} \end{array}\right\} I_1 = I_2 = 1\ A \text{ si } f_2 = 2{,}10^{-7}\ N.$$

Cette définition revient à prendre par convention :

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ SI$ exactement.

5 - THÉORÈME D'AMPÈRE

Nous donnerons ce théorème sans démonstration : une démonstration directe étant assez laborieuse.



Considérons un certain nombre de fils parcourus par des courants d'intensités $I_1, I_2, \ldots, I_n$:

Considérons une courbe fermée (Γ) enlaçant certains de ces courants, par exemple $I_1, I_2, \ldots, I_j$. Choisissons un sens positif de parcours sur (Γ) et le sens correspondant de la normale $\vec{n}$ orientée à (Γ), (règle du tire-bouchon).

Comptons positivement les courants de même sens que $\vec{n}$ et négativement ceux de sens contraire.

Le théorème d'Ampère s'exprime sous la forme :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_o \sum_{i=1}^{i=j} I_i$$

$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$ étant la circulation de $\vec{B}$ le long de (Γ). Répétons que dans la somme $\sum_{i=1}^{i=j} I_i$ on ne considère que les courants traversant la surface limitée par (Γ), algébrisés comme il a été dit ci-dessus.

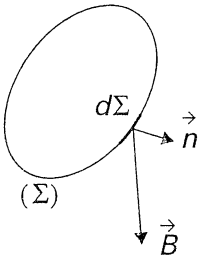
6 - CONSERVATION DU FLUX MAGNÉTIQUE

Soit une région de l'espace où existe un champ magnétique $\vec{B}$, *a priori* quelconque.

Soit une surface *fermée* (Σ) prise dans cette région. On montre que

Le flux de $\vec{B}$ sortant de (Σ) est nul

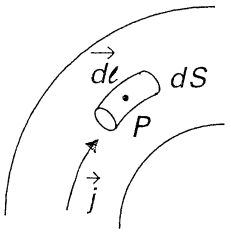
Ce qui s'exprime sous la forme



$$\phi_\Sigma(\vec{B}) = \oiint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{n}\, d\Sigma = 0$$

7 - DISTRIBUTION DE COURANTS NON FILIFORMES

Envisageons le cas de courants non filiformes.



Soit un tube élémentaire de courant de section droite dS de longueur $d\ell$ parcouru par un courant de densité $\vec{J}$. Le champ créé en M tel que $\overrightarrow{PM} = \vec{r}$ est :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, di \cdot \vec{d\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

di étant le courant élémentaire traversant le tube, soit :

$$di = J \cdot dS$$

donc :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} J \cdot dS \vec{d\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Or, $J \cdot \vec{d\ell} = \vec{J} \cdot d\ell$ et $dS \cdot d\ell = d\mathcal{V}$, volume du tube élémentaire.

$$\boxed{\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mathcal{V} \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

Pour un circuit non filiforme (C), on aura :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_C d\mathcal{V} \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

Pour une distribution surfacique de courants de densité surfacique $\vec{K}$, on aura de même

$$\boxed{\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} dS \vec{K} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

et

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_C dS \vec{K} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

Remarque

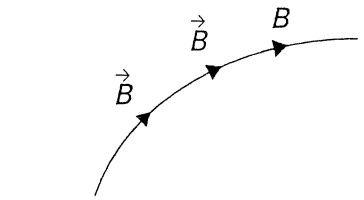
En pratique ces formules servent peu. Dans le cas des distributions volumiques ou surfaciques, on décompose le circuit en circuits élémentaires simples dont on connaît le champ (voir exercices 1 à 6) et on somme les champs élémentaires.

8 - TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

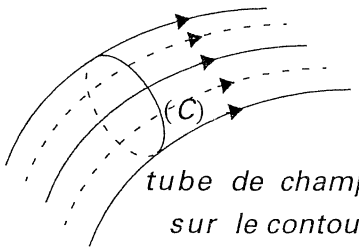
1. Définitions

* On appelle *ligne de champ magnétique* toute courbe tangente en chacun de ses points au vecteur $\vec{B}$ en ce point. Une ligne de champ est en général orientée par le sens de $\vec{B}$.

* On appelle *tube de champ* l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.



ligne de champ



tube de champ s'appuyant sur le contour fermé (C)

2. Équations des lignes de champ

Les équations des lignes de champ magnétique ont exactement la même allure que pour le champ électrostatique :

* coordonnées cartésiennes $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$;

* coordonnées cylindriques $\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}$;

* coordonnées sphériques $\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{r\sin\theta\, d\varphi}{B_\varphi}$.

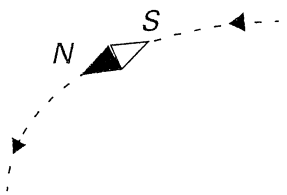
3. Détermination des lignes de champ

Comme pour le champ électrostatique, on peut déterminer les lignes de champ magnétique de deux manières différentes :

a) Détermination expérimentale

Sur un support en carton, on place de la limaille de fer dans le champ étudié. Sous l'action de celui-ci les grains s'aimantent : ils constituent de minuscules dipôles qui s'orientent dans le champ dans lequel ils sont placés (voir chapitre suivant) de manière à ce que la partie la plus longue du grain soit colinéaire au champ. On visualise ainsi les lignes du champ. On obtient un *spectre magnétique*.

Il est possible de connaître le sens du champ magnétique en plaçant au point du champ considéré une petite aiguille aimantée telle une aiguille de boussole. Celle-ci constitue un très petit aimant possédant un pôle Nord (en général matérialisé en rouge) et un pôle Sud : elle s'oriente de manière à ce que *le champ la traverse dans le sens Sud-Nord*.



b) Simulation informatique

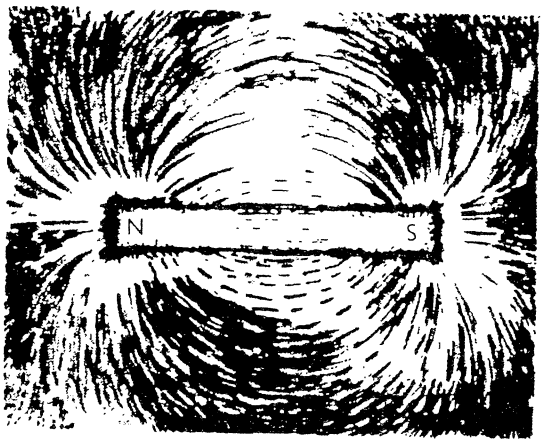
On peut déterminer les lignes de champ au moyen d'un ordinateur et d'un logiciel adapté. Celui-ci peut résoudre les équations différentielles des lignes de champ et en donner une représentation graphique. Il peut aussi donner directement les lignes de champ par simple connaissance de la distribution de courants.

4. Topographie de quelques champs

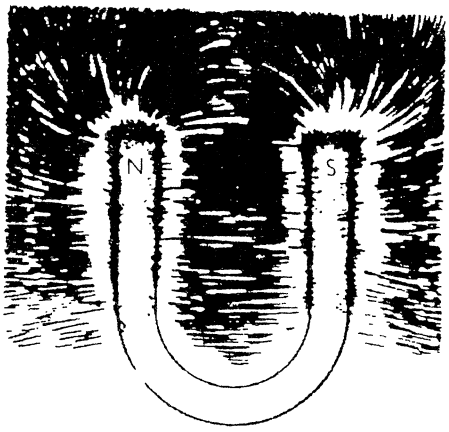
Nous donnons ci-après la topographie (c'est-à-dire la représentation des lignes de champ) de quelques champs usuels.

** Spectres magnétiques*

• aimants



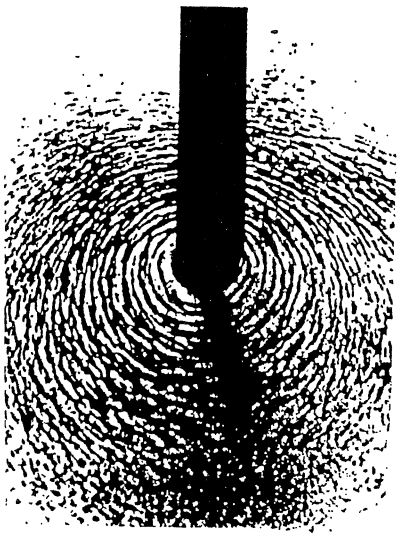
Spectre magnétique d'un aimant droit



Spectre magnétique
d'un aimant en fer à cheval

(aussi dit aimant en U)

• courant

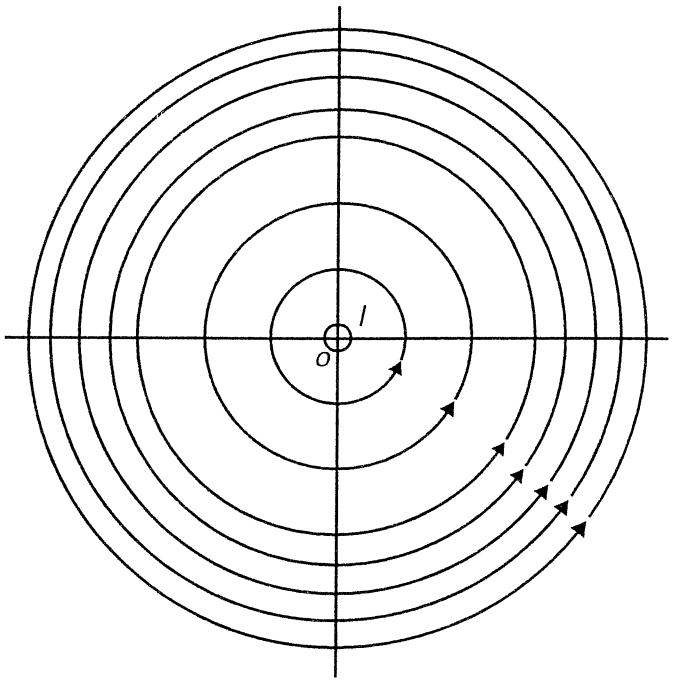


La figure ci-contre montre le spectre magnétique d'un câble cylindrique de longueur très grande devant le rayon.

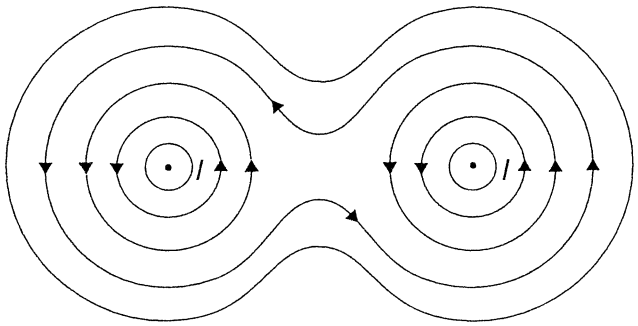
** Simulation informatique du champ magnétique créé par quelques circuits*

Nous donnons ci-après les allures des lignes de champ obtenues par simulation informatique. Dans chaque cas le sens des lignes de champ est indiqué.

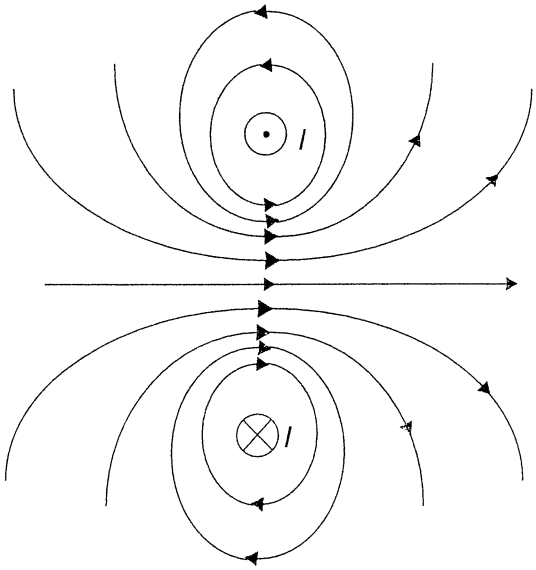
• *fil « infini » :*



• *deux fils « infinis » parallèles parcourus par des courants de même intensité et de même sens :*



• *spire circulaire filiforme :*

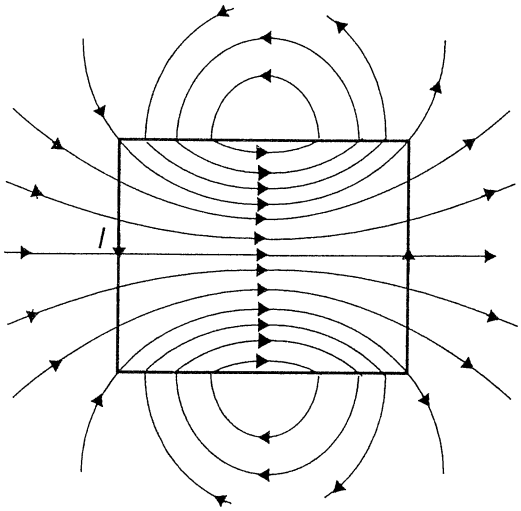


• *solénoïde à spires jointives :*

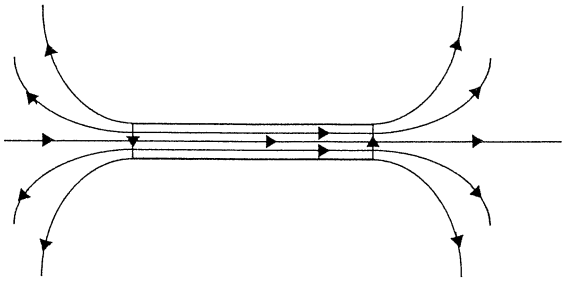
Un solénoïde est un enroulement hélicoïdal de fil sur un mandrin cylindrique. Selon les cas, les spires sont jointives ou non. En général le diamètre du fil (y compris l'isolant) est petit devant le diamètre du mandrin, de sorte que la solénoïde peut être assimilé à

un ensemble de spires circulaires. Le solénoïde est dit infiniment long lorsque sa longueur est grande devant le rayon du mandrin. Il s'agit d'un modèle très souvent utilisable.

Les lignes de champ d'un solénoïde sont les suivantes :



Solénoïde de longueur « finie »



Solénoïde « infiniment long » (on remarquera qu'à l'intérieur du solénoïde les lignes de champ sont parallèles aux axes et qu'à l'extérieur, au voisinage du solénoïde, le champ est nul : il n'y a pas de ligne de champ).

5. Propriétés des lignes de champ

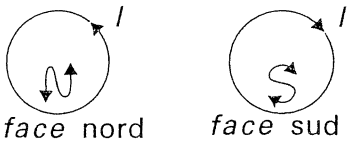
La topographie de divers champs permet d'arriver aux conclusions suivantes.

• Une ligne de champ magnétique est fermée sur elle-même (éventuellement à l'infini).

• Le champ magnétique est continu lorsque l'on passe d'un conducteur au vide extérieur.

• Les lignes de champ se resserrent lorsque le module du champ augmente et inversement.

• Un circuit fermé parcouru par un courant présente deux faces : une face nord et une face sud. Un observateur voit une face nord s'il voit circuler le courant dans le sens trigonométrique direct, il voit la face sud dans le cas contraire. Sur les figures ci-dessous nous avons fait apparaître les moyens mnémotechniques permettant de repérer une face nord et une face sud.

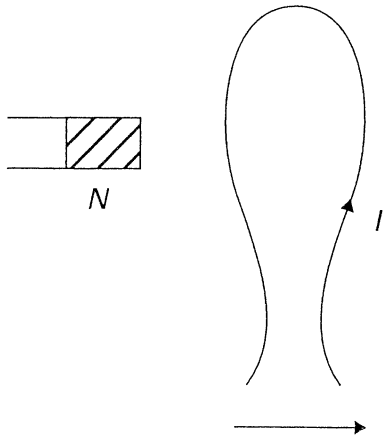


face nord *face* sud

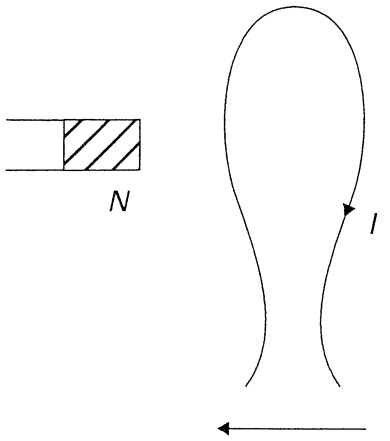
L'expérience montre (voir plus haut) que les lignes de champ traversent le circuit *dans le sens sud-nord.*

Remarque

Les faces d'un circuit formé sont nommées nord et sud en relation avec les aimants : la face nord d'un circuit est repoussée par le pôle nord d'un aimant et attirée par le pôle sud de l'aimant ; et inversement pour ce qui est de la face sud.



Le pôle nord de l'aimant repousse la face nord de la spire.



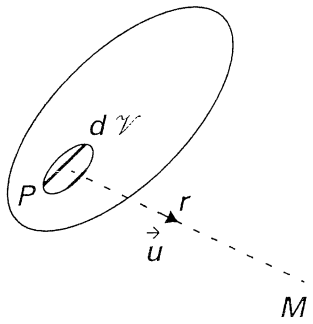
Le pôle nord de l'aimant attire la face sud de la spire.

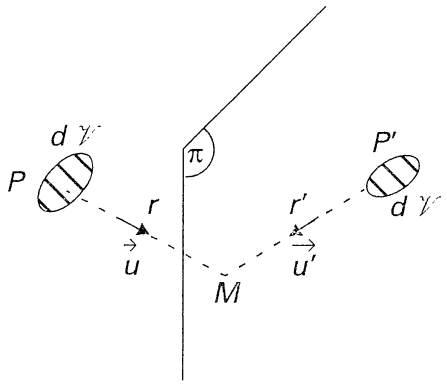
9 - SYMÉTRIES, ANTISYMÉTRIES ET INVARIANCES DU CHAMP MAGNÉTIQUE

1. Symétries

Soit une distribution de courants dans un volume $(\mathcal{V})$. Soit $\vec{J}(P)$ la densité volumique de courants en un point P de ce volume. En un point M de l'espace, un élément de volume $d\mathcal{V}$ centré en P créé en M un champ :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\vec{J}(P) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} d\mathcal{V} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} d\mathcal{V}$$





Supposons que la distribution de courants présente un plan de symétrie (π) passant par M. Cela signifie qu'à tout $d\mathcal{V}$ centré en P on peut associer un $d\mathcal{V}'$ identique centré en P' tel que $\frac{J(P)}{r^2} = \frac{J(P')}{r'^2}$, les unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ étant symétriques par rapport à (π).

Le champ total créé par la distribution sera :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{\gamma} \frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} d\gamma .$$

La contribution à $\vec{B}$ des deux éléments de courants centrés en P et P' est :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} d\mathcal{V} \qquad \overrightarrow{dB'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}(P') \wedge \vec{u'}}{r'^2} d\mathcal{V}'$$

Leur somme est, compte-tenu de la symétrie :

$$\overrightarrow{dB} + \overrightarrow{dB'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}(P)}{r^2} \wedge (\vec{u} + \vec{u'})\, d\mathcal{V}$$

Or, $\vec{u} + \vec{u'}$ est contenu dans le plan (π). Donc $\vec{J}(P) \wedge (\vec{u} + \vec{u'})$ est perpendiculaire à (π).

Comme, à chaque $d\mathcal{V}$ centré en P on pourra associer un $d\mathcal{V}$ centré en P', le champ total $\vec{B}$ sera porté par la perpendiculaire en M à (π). Ainsi :

Si la distribution possède un plan de symétrie, $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan de symétrie en tout point de celui-ci.

Si la distribution de courants est uniforme, $J(P) = J(P')$. Le plan de symétrie éventuel se réduit alors à un plan de symétrie géométrique.

Si la distribution est uniforme et possède un plan de symétrie géométrique, $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan de symétrie en tout point de celui-ci.

La démonstration a été faite dans le cas d'une distribution volumique de courants. On peut la reprendre telle quelle pour une distribution surfacique ou bien pour des courants filiformes.

Si la distribution possède deux plans de symétrie passant par M se coupant suivant un axe (Δ), cet axe est un axe de symétrie. Le champ $\vec{B}$ doit être perpendiculaire aux deux plans à la fois, il est donc nul.

- Si la distribution possède un axe de symétrie, $\vec{B}$ est nul en tout point de celui-ci.

Enfin, si la distribution possède un centre de symétrie, celui-ci est l'intersection de deux ou plusieurs axes de symétrie. Le champ $\vec{B}$ est évidemment nul.

- Si la distribution possède un centre de symétrie, $\vec{B}$ est nul en ce point.

2. Antisymétries

Un plan (π') sera un plan d'antisymétrie pour la distribution si $\frac{J(P)}{r^2} = -\frac{J(P')}{r^2}$, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ étant symétriques par rapport à (π'). Les vecteurs $\frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2}$ et $\frac{\vec{J}(P') \wedge \vec{u'}}{r'^2}$ sont alors symétriques par rapport à (π'). Le vecteur résultant $\frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} + \frac{\vec{J}(P') \wedge \vec{u'}}{r'^2}$ est alors porté par (π').

En associant deux à deux les vecteurs élémentaires, on en déduit que :

Si la distribution possède un plan d'antisymétrie, $\vec{B}$ est porté par ce plan en tout point de celui-ci.

On en déduit que :

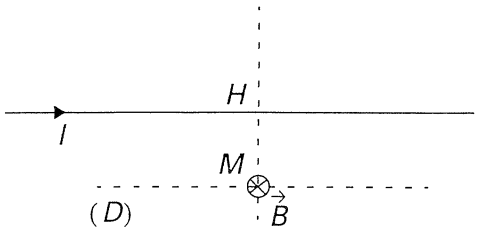
Si la distribution possède un axe d'antisymétrie, $\vec{B}$ est porté par cet axe en tout point de celui-ci.

3. Invariances

Le champ magnétique $\vec{B}$ est invariant dans une région de l'espace si, pour tous points M, M' de cette région :

$$B(M) = B(M')$$

Cette invariance éventuelle est liée à la présence d'éléments de symétrie ou d'antisymétrie.

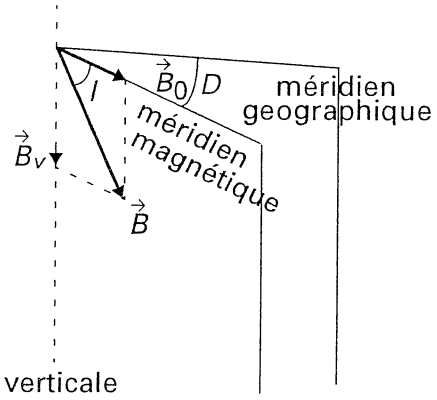


Considérons, par exemple, un fil infini parcouru par un courant d'intensité I. Tout plan (π) perpendiculaire au fil est plan d'antisymétrie puisqu'il y a autant d'éléments de fil de part et d'autre, le sens du courant étant le même de chaque côté de (π).

Le plan de figure est plan de symétrie. Il s'en suit que $\vec{B}$ en M est perpendiculaire au plan de figure et contenu dans le plan (π). Les différents points M' situés sur la droite (D) parallèle au fil passant par M sont tous placés de la même manière par rapport au courant de sorte que $\vec{B}$ aura même module en tous les points M' de (D). Si l'on considère l'ensemble des points M'' situés sur le cercle centré en H, de rayon HM, comme tous ces points sont placés de la même manière par rapport au courant, $\vec{B}$ y aura même module. Ainsi, en tout point M, $\vec{B} = B(r) \cdot \vec{u}_\theta$, r représentant la distance de M au fil et $\vec{u}_\theta$ étant l'unitaire orthoradial orienté par le sens du courant.

Annexe
LE MAGNÉTISME TERRESTRE

Chacun sait que la Terre crée dans tout son voisinage un champ magnétique, dit *champ magnétique terrestre*. La mise en évidence la plus élémentaire de celui-ci se fait au moyen d'une boussole, petite aiguille aimantée possédant un pôle Nord et un pôle Sud, mobile autour d'un axe vertical. Cette aiguille donne en un point et à un instant donnés la direction et le sens de la *composante horizontale du champ magnétique terrestre*. On sait que cette aiguille va s'orienter dans le champ $\vec{B}$ créé par la terre de manière à ce que la composante horizontale $\vec{B}_0$ la traverse dans le sens Sud-Nord. Cela permet de déterminer le *Nord magnétique*. Le plan vertical défini par l'axe de l'aiguille est le *méridien magnétique*. Celui-ci fait avec le méridien géographique défini par l'axe de rotation de la Terre, un angle appelé *déclinaison magnétique*, noté *D*. Celui-ci est comptée positivement vers l'est (du méridien géographique) ; elle est dite orientale si elle est positive, occidentale dans le cas contraire.



Le champ $\vec{B}$ peut être décomposé en une composante horizontale $\vec{B}_0$ et une composante verticale $\vec{B}_V$. L'angle que fait $\vec{B}$ avec l'horizontale est l'*inclinaison magnétique*, notée *I*. Celle-ci est comptée positivement vers le bas.

La connaissance de *D*, *I*, B_0 permet de déterminer entièrement $\vec{B}$.

L'expérience montre que $\vec{B}$ dépend du lieu et de l'instant où on le détermine. La déclinaison et l'inclinaison subissent des variations diurnes, annuelles, séculaires. À l'échelle humaine, celles-ci sont faibles, mais parfaitement mesurables.

On appelle *lignes isogones* les lignes d'égale déclinaison et *lignes isoclines* les lignes d'égale inclinaison. Les lignes isogones se coupent en deux points « voisins » des pôles, appelés *pôles magnétiques*. Actuellement le pôle Nord magnétique est situé dans le nord du Canada à environ 1 600 km du pôle Nord géographique, et le pôle Sud magnétique est près de la côte de la Terre Adélie à environ 2 600 km du pôle Sud géographique.

La composante horizontale du champ terrestre est toujours très voisine de

$$B_0 = 2{,}10^{-5}\ \text{T}$$

On remarquera qu'il s'agit d'un champ relativement élevé que l'on ne peut négliger que si les champs créés par les courants et les aimants que l'on considère sont assez intenses.

Variations du champ magnétique terrestre

Celles-ci sont de différentes natures :

• régulières : liées à la Terre elle-même ;

• d'origine humaine : la présence de très nombreux champs magnétiques créés par les courants qu'utilise l'homme modifie de manière relativement désordonnée le champ ;

• liées au sous-sol : la présence de certaines masses métalliques dans le sous-sol terrestre modifie localement le champ, ce qui est mis à profit pour étudier plus précisément ce sous-sol ;

• liées au Soleil : à des phénomènes solaires intenses se traduisant par l'émission de rayonnements ou de particules correspondent, quelques minutes après, des orages magnétiques, brusques variations du champ terrestre ;

• inversions du champ : de récentes études faites sur le magnétisme résiduel des roches et sur les anomalies magnétiques à la surface des océans ont montré que le champ magnétique terrestre a inversé ses polarités au moins 170 fois dans les 100 millions d'années écoulées. Cette connaissance des inversions a pu être faite à l'occasion de la datation d'isotopes radioactifs contenus dans certains minéraux des roches. Elle a une grande importance en ce qui concerne la confirmation de la théorie de la dérive des continents.

Origine du champ magnétique terrestre

On ne sait pas, actuellement, quelle est l'origine exacte de ce champ. La théorie actuellement étudiée est la *théorie dynamo*.

Le magnétisme terrestre serait d'origine dynamique plutôt que statique, ce qui serait le cas si le noyau terrestre en fer était solide et aimanté.

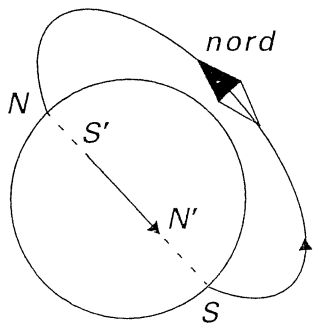
Le fer ne peut être aimanté de manière permanente qu'en-dessous de 540 °C, alors que la température du centre de la Terre serait de l'ordre de 6 650 °C. La théorie dynamo suggère que le noyau de fer est liquide, sauf au centre-même de la Terre où il se solidifie sous l'effet de la pression ; et que des courants de convection circulent dans ce liquide comme dans les spires d'une dynamo. Le noyau solide tourne moins vite que l'extérieur, ce qui expliquerait les variations séculaires du champ terrestre.

Modélisations du champ magnétique terrestre

Diverses modélisations peuvent être données du champ magnétique terrestre.

La plus simple consiste à considérer au centre de la Terre un énorme aimant droit orienté dans la direction nord-sud magnétique ; les variations du champ étant alors dues au léger déplacement de cet aimant.

Une modélisation plus élaborée due à Gauss envisage plusieurs aimants. Un premier aimant représentant la contribution principale au champ est placé au centre de la terre et son axe est dirigé suivant l'axe de rotation de la Terre. Un second aimant représentant la contribution suivante au champ est constitué par un aimant dont l'axe est oblique par rapport à l'axe de rotation de la Terre. D'autres aimants permettent de rendre compte plus précisément du champ terrestre.



On sait que des pôles magnétiques de même nom se repoussent et que des pôles de noms contraires s'attirent. L'aimant unique de la première modélisation a donc son pôle Sud du côté du Nord magnétique et son pôle Nord du côté du Sud magnétique. Sur la figure ci-contre S' et N' représentent les pôles de cet aimant unique. On a fait apparaître une ligne de champ et l'aiguille de boussole en un point de l'espace (voir, par exemple, le problème n° 6).

Il en est de même pour les modélisations plus élaborées. Néanmoins ces modélisations ne rendent pas compte, et de loin, de toutes les caractéristiques du champ magnétique terrestre.

EXERCICES-TYPES

Les exercices 1 à 6 inclus doivent être considérés comme des compléments de cours ; il faut savoir les refaire sans hésitation.

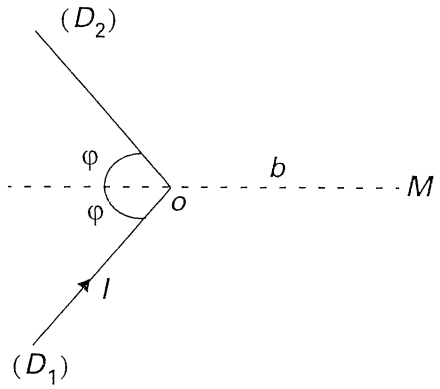
01 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN SEGMENT

Calculer le champ magnétique créé par un segment parcouru par un courant d'intensité I en un point M distant du segment de a. On appellera θ_1 et θ_2 les angles entre la perpendiculaire au fil issue de M et les droites joignant M aux extrémités du segment.

Examiner le cas du fil rectiligne indéfini.

02 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN COURANT ANGULAIRE

Appliquer le résultat de l'exercice 1 au cas du courant angulaire ci-après.



(D_1) et (D_2) sont deux demi-droites parcourues par le courant d'intensité I.

Le point M est à la distance b du sommet de l'angle sur la bissectrice de l'angle 2φ des demi-droites.

03 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPIRE CIRCULAIRE EN UN POINT DE SON AXE

Soit une spire filiforme de rayon R parcourue par un courant d'intensité I.

Calculer le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire à une distance x du centre de celle-ci.

Tracer la courbe $B(x)$.

04 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPIRE CIRCULAIRE EN UN POINT VOISIN DE L'AXE

En utilisant le résultat de l'exercice 3, déterminer les composantes axiale et radiale du champ magnétique créé par la spire en un point N très voisin de M tel que $MN = r << x$, situé sur une perpendiculaire à l'axe en M.

05 – CHAMP MAGNÉTIQUE D'UN SOLÉNOÏDE

On considère un solénoïde de longueur ℓ comportant au total N spires jointives ayant le même rayon R régulièrement réparties.

Déterminer le champ magnétique créé en un point quelconque de l'axe du solénoïde en fonction des angles θ_1 et θ_2 sous lesquels du point considéré on voit les faces terminales du solénoïde.

Examiner le cas du solénoïde « infiniment long », c'est-à-dire tel que $R <<< 1$.

06 – BOBINES D'HELMHOLTZ

Deux bobines de N spires, de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I, ont leurs centres distants de R. Le sens du courant est tel que les champs créés par les deux spires s'ajoutent dans l'espace situé entre les deux spires :

1/ Calculer B au milieu O de l'axe joignant les deux centres.

2/ Calculer B pour un point M de l'axe voisin de O repéré par $OM = x$.

Quelle est la variation relative de B entre O et M pour $\frac{x}{R} = 0{,}1$?

07 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPIRE EN UN POINT TRÈS VOISIN DE SON CENTRE

Calculer le champ magnétique créé par une spire de rayon R parcourue par un

courant d'intensité I en un point M du plan de celle-ci très voisin du centre O (la distance $OM = x$ est très petite devant R).

08 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPIRE EN UN POINT TRÈS ÉLOIGNÉ

On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I. Soit M un point situé dans le plan de la spire à une distance $OM = x$ du centre de celle-ci.

Calculer le champ magnétique produit par la spire en M dans le cas où $x >> R$.

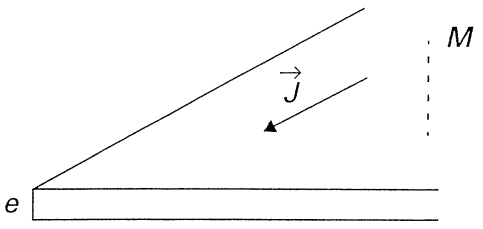
09 - CHAMP MAGNÉTIQUE D'UN DEMI-CYLINDRE

On considère un demi-cylindre de longueur infinie parcouru par un courant I uniformément réparti.

Calculer $\vec{B}$ en un point de l'axe du demi-cylindre.

10 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN PLAN

Calculer le champ $\vec{B}$ créé en un point quelconque situé hors d'une plaque métallique d'épaisseur e infinie dans toutes les directions parcourue par un courant de densité $\vec{J}$ uniforme.



11 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE EN ROTATION

Une sphère de rayon R portant une densité uniforme σ de charges électriques tourne autour de son diamètre Oz avec une vitesse angulaire ω. Calculer le champ magnétique au centre de la sphère.

12 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN ANNEAU

Calculer le champ magnétique produit en son centre par un disque circulaire plat et mince de largeur $2a$ et de rayon moyen r, quand il est parcouru par un courant d'intensité I.

Examiner le cas $2a << r$.

13 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN RUBAN

Calculer le champ magnétique produit en son centre par un ruban plat très mince de largeur $2b$ enroulé sous forme d'un cylindre de rayon r quand il est parcouru par un courant d'intensité I.

Examiner le cas où le ruban est infiniment large, la densité linéaire de courant $\frac{I}{2b}$ restant finie.

Examiner aussi le cas $2b << r$.

14 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN PLAN

1/ Soit un repère trirectangle $Oxyz$. Le plan conducteur xOz est parcouru par un courant de densité superficielle $\vec{J}$ parallèle à Oz. Déterminer B en fonction de $\vec{J}$ et du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à xOz, en un point quelconque.

2/ $\vec{J}$ est dû à des charges de densité surfacique σ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$.

Déterminer la relation entre $\vec{J}$, σ, $\vec{v}$.

3/ En déduire la relation entre $\vec{B}$, $\vec{v}$, c (célérité de la lumière) et le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par les charges de densité σ.

15 - RELATION ENTRE CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

Soit une charge ponctuelle q placée en un point M animée d'une vitesse $\vec{v}$. Elle crée en P tel que $\overrightarrow{MP} = \vec{r}$ un champ $\vec{E}$ et un champ $\vec{B}$.

En admettant que $\vec{E}$ a la même expression qu'en électrostatique, trouver la relation qu'il y a entre $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$.

16 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN ÉLECTRON

Calculer $\vec{B}$ créé par un électron décrivant un cercle de rayon $a = 0{,}53$ Å autour d'un proton au point où est placé le proton.

17 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN FIL INFINI

Par application du théorème d'Ampère, déterminer le champ créé par un fil rectiligne indéfini parcouru par un courant d'intensité I.

18 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE

On considère un câble de rayon R, de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité totale I uniformément réparti.

Déterminer le champ magnétique en un point quelconque.

19 – CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN CONDUCTEUR COAXIAL

On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons R_1, R_2, R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

Calculer $\vec{B}$ en tout point.

Représenter $B(r)$, r étant la distance du point considéré à l'axe du cylindre.

INDICATIONS

01 et 03 - Chercher la direction du champ résultant. Calculer le champ créé par un élément de courant, projeter sur la direction résultante et sommer sur les projections.

02 - Utiliser le résultat de l'exercice 1.

04 - Décomposer $\vec{B}$ en deux composantes judicieusement choisies. Tenir compte de $r << x$ et écrire que le flux de $\vec{B}$ sortant d'une surface fermée convenable est nul.

05 - Décomposer le solénoïde en une infinité de spires et utiliser le résultat de l'exercice 3.

06 - Utiliser le résultat de l'exercice 3.

07 - Faire un développement limité au deuxième ordre en x/R.

08 - Faire un développement limité au deuxième ordre en R/x.

09 - Chercher la direction du champ résultant. Décomposer le cylindre en fils infinitésimaux.

10 - Chercher la direction du champ résultant. Décomposer le plan en fils infinitésimaux.

11 - Décomposer le sphère en spires élémentaires.

12 - Décomposer l'anneau en spires élémentaires.

13 - Décomposer le ruban en spires élémentaires.

14 - Procéder comme à l'exercice 10. Se reporter aussi à l'exercice 4, chapitre 3.

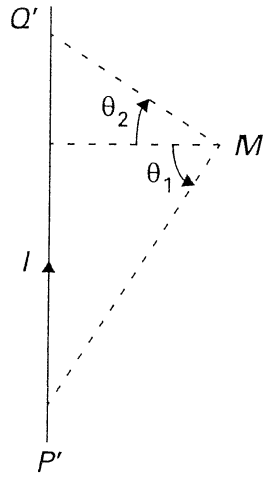
15 - Il suffit d'éliminer $\vec{r}$ entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

16 - Modéliser l'électron en mouvement par une spire.

17, 18 et 19 - Utiliser le théorème d'Ampère.

SOLUTIONS

01 - On orientera les angles θ_1 et θ_2 par le sens du courant I. Dans le cas de la figure ci-contre, θ_1 est négatif et θ_2 est positif.

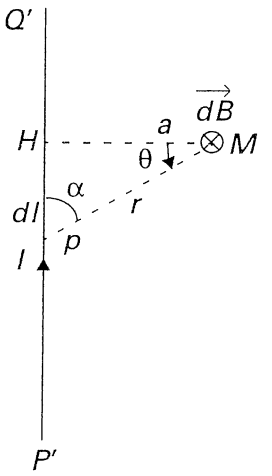


Soit un élément de longueur $\overrightarrow{d\ell}$, celui-ci crée en M un champ élémentaire $\overrightarrow{dB}$:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \overrightarrow{d\ell} \wedge \frac{r}{r_3}$$

en posant : $\overrightarrow{PM} = \vec{r}$.

Le vecteur $\overrightarrow{dB}$ sera perpendiculaire au plan formé par $d\ell$ et M et orienté dans le cas ci-contre vers l'arrière.



Tous les vecteurs $\overrightarrow{dB}$ créés par tous les éléments $\overrightarrow{d\ell}$ en lesquels on peut décomposer le segment $P'Q'$ seront colinéaires et de même sens.

Le module B du champ résultant sera donc :

$$B = \int_{P'Q'} dB$$

or, $dB = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\ell \sin\alpha}{r^2}$.

Posons $HP = \ell$. On a $\frac{\ell}{a} = \tan\theta$ donc $d\ell = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}$.

D'autre part $\sin\alpha = \cos\theta$

$$r = \frac{a}{\cos\theta} .$$

En reportant dans dB, il vient : $dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\cos^2\theta}{a^2}$.

Soit $dB = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \cos\theta\, d\theta$.

En intégrant sur le segment, il vient :

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta \text{ donc } \boxed{B = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)}$$

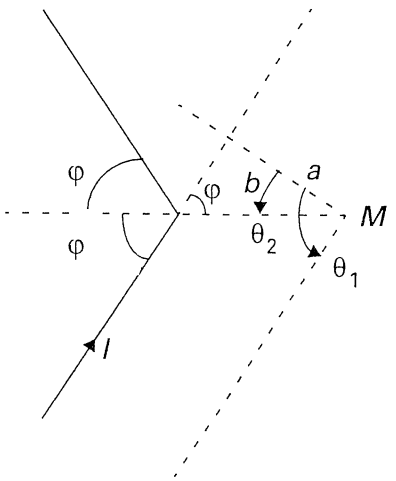
Cas du fil indéfini

Dans ce cas, on a $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}}$

02 - Les demi-droites créent en M des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ égaux par raison de symétrie.

Ces deux champs sont perpendiculaires au plan formé par (D_1) et (D_2) et orientés vers l'arrière. Il en sera de même du champ résultant M dont le module sera :

$$B = B_1 + B_2 = 2B_1$$



On a vu à l'exercice précédent que

$$B_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Or, ici $a = b\sin\varphi$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

donc $B_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi b\sin\varphi}(-\cos\varphi + 1)$

Comme $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$$B_1 = \frac{\mu_o I \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi b 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \text{ soit } B_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi b}\tan\frac{\varphi}{2}$$

Par suite :

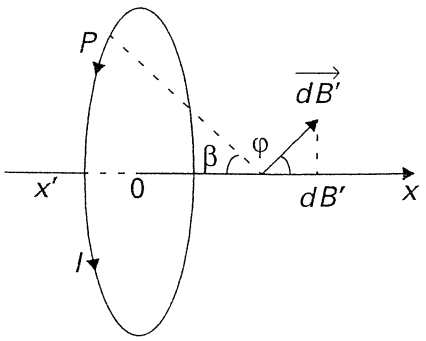
$$\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2\pi b}\tan\frac{\varphi}{2}}$$

Remarque : On retrouve le résultat du fil rectiligne indéfini. Dans ce cas $2\varphi = \pi$ donc $\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\varphi}{4} = 1$ et

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi b}$$

03 - Orientons sur l'axe $x'Ox$ par le sens du courant en utilisant la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Soit un élément de longueur $\overrightarrow{d\ell}$ de la spire centré en P. En M cet élément crée un champ élémentaire $\overrightarrow{dB}$ perpendiculaire à PM, orienté comme ci-contre de module



$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\ell \sin\theta}{r^2}$$

avec $r = PM$ et $\theta = (\overrightarrow{d\ell}, \overrightarrow{PM})$.

Or, $\theta = \frac{\pi}{2}$ quel que soit l'élément $d\ell$ et $r = \text{constante}$. Par raison de symétrie le champ résultant B sera porté par l'axe. La composante utile de dB sera donc :

$$dB' = dB\cos\varphi \text{ or } \varphi = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ donc } dB' = dB\sin\beta .$$

Pour tous les éléments de $d\ell$, β est le même. Donc :

$$dB' = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2}\sin\beta \cdot d\ell .$$

L'intégration de dB' sur toute la spire donne le module du champ résultant B. Donc :

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2}\sin\beta \cdot 2\pi R$$

or, $\sin\beta = \frac{R}{r}$ Donc $\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2R}\sin^3\beta}$

Ou en fonction de x :

$$\boxed{B = \frac{\mu_o I R^2}{2\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Étude de $B(x)$

Il est bien évident que pour deux points M et M' de l'axe symétriques par rapport à O, on aura le même champ $\vec{B}$. On étudiera donc $B(x)$ pour $x \geq 0$ et on complétera par symétrie pour $x \leq 0$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu \cdot I R^2}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{\left(x^2 + R^2\right)^{5/2}}$$

soit

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{3\mu_o I R^2 x}{\left(x^2 + R^3\right)^{\frac{5}{2}}} .$$

Pour $x \geq 0$ $\frac{dB}{dx} \leq 0$ donc $B(x)$ est une fonction décroissante de x.

Pour $x = 0$ $\frac{dB}{dx} = 0$ la courbe $B(x)$ admet donc une tangente horizontale.

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{3\mu_o I R^2}{(x^2+R^2)^{5/2}} + \frac{15\mu_o I R^2 x^2}{(x^2+R^2)^{1/2}}$$

soit $\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{3\mu_o I R^2}{(x^2+R^2)^{7/2}}[5x^2 - x^2 - R^2]$ ou

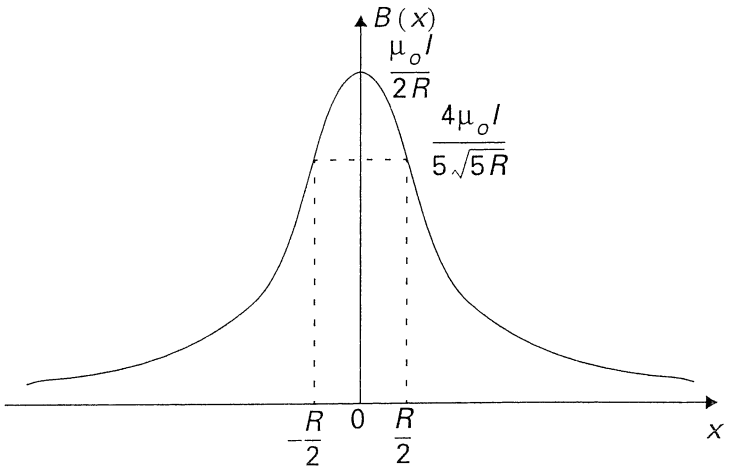
$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{3\mu_o I R^2}{(x^2+R^2)^{7/2}}(4x^2 - R^2)$$

$\frac{d^2B}{dx^2}$ s'annule pour $x = \frac{R}{2}$ $(x>0)$. Pour $x < \frac{R}{2}$, $\frac{d^2B}{dx^2} < 0$ et $x > \frac{R}{2}$, $\frac{d^2B}{dx^2} > 0$.

La courbe $B(x)$ admet donc un point d'inflexion pour $x = \frac{R}{2}$ pour lequel $B = \frac{4\mu_o I}{5\sqrt{5}R}$.

Pour $x = 0$, $B = B_o = \frac{\mu_o I}{2R}$

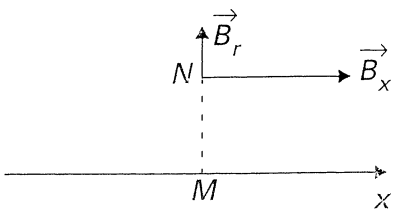
On en déduit la courbe $B(x)$.



04 - On a vu qu'en M le champ est axial de module :

$$B = \frac{\mu_o I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

En N situé hors de l'axe, le champ ne sera plus axial. On le décomposera en deux composantes : l'une axiale pratiquement égale à $B(M)$



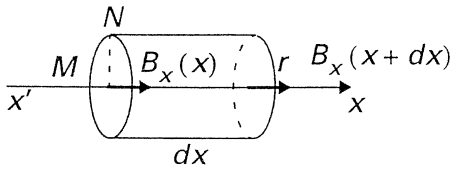
donc $B_x(N) = \frac{\mu_o I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$

et l'autre radiale tenant compte du fait que N, B n'est pas axial.

Comptons $\vec{B}_r$ suivant un axe porté par MN orienté de M vers N.

Considérons alors un cylindre d'axe $x'x$, de rayon r, de hauteur dx.

Écrivons que $\vec{B}$ est à flux conservatif.



Le flux de $\vec{B}$ sortant de ce cylindre est :

$$\Phi = B_r \cdot 2\pi r dx - \pi r^2 B_x(x) + \pi r^2 B_x(x+dx) = 0$$

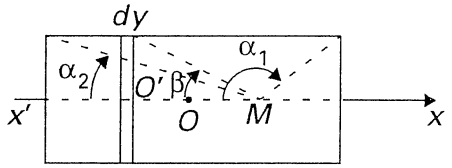
or, $B_x(x+dx) - B_x(x) = \dfrac{dB_x}{dx}dx$

$$2B_r dx = -r\frac{dB_x}{dx}dx$$

Soit $\boxed{B_r = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_x}{dx}}$ comme (exercice 3) $\dfrac{dB_x}{dx} = -\dfrac{3\mu_o I R^2 x}{2(x^2+R^2)^{5/2}}$

$$\boxed{B_r = \frac{3\mu_o I R^2 x r}{4(x^2+R^2)^{5/2}}}$$

05 - Symbolisons le solénoïde comme ci-dessous et soit le point M où l'on calcule le champ.



Soit O le milieu de l'axe et orientons celui-ci par le sens du courant comme à l'exercice 3. Posons $\overline{OM} = x$. Et considérons une tranche de solénoïde d'épaisseur dy. Celle-ci contient $\dfrac{N}{\ell}dy$ spires. Soit O' le centre de cette tranche.

Soit $O'M = y$. En utilisant le résultat de l'exercice 3, on voit que le champ élémentaire créé par cette tranche sera

$$dB = \frac{\mu_o I R^2}{2(y^2+R^2)^{3/2}} \cdot \frac{N}{\ell}dy.$$

Prenons comme variable d'intégration l'angle β.

On a $\frac{Y}{R} = -\text{cotan}\, g\beta$

donc $dy = \frac{R}{\sin^2\beta} d\beta$

et $dB = \frac{\mu_o I R^2}{2R^3 (1 + \cot g^2\beta)^{3/2}} \cdot \frac{N}{\ell}\left(\frac{R}{\sin^2\beta}\right) d\beta$.

soit $dB = \frac{\mu_o IN}{2\ell} \sin\beta d\beta = \frac{\mu_o IN}{2\ell} d(-\cos\beta)$.

En intégrant entre les angles α_1 et α_2, il vient puisque $\alpha - \beta = \pi$:

$$\boxed{B = \frac{\mu_o IN}{2\ell} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}$$

$\frac{N}{\ell} = n_1$ représente le nombre de spires par unité de longueur. Donc :

$$B = \frac{\mu_o n_1 I}{2} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1).$$

Solénoïde « infiniment long »

Dans ce cas $\alpha_2 \approx 0$ et $\alpha_1 \approx \pi$ d'où $\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \approx 2$ donc $\boxed{B = \mu_o n_1 I}$

06 - On sait que pour une spire $B = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3\beta$ donc en O pour les deux bobines de N spires chacune on aura :

$$B_o = 2 \frac{\mu_o NI}{2R} \sin^3\beta$$

avec $\sin\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ d'où $\boxed{B_o = \frac{8\mu_o NI}{5\sqrt{5}R}}$

2 – En M, on aura

$$B_1 = \frac{\mu_o NI}{2R} \sin^3\beta_1 \text{ avec } \sin\beta_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2} + x\right)^2}}$$

et $B_2 = \frac{\mu_o NI}{2} \sin^3\beta_2$ avec $\sin\beta_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2} - x\right)^2}}$

soit $B = \frac{\mu_o NI}{2R} R^2 \left[\left(\frac{5R^2}{4} + Rx + x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{5R^2}{4} - Rx + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$

ou aussi $B = \frac{4\mu_o NI}{5\sqrt{5}R}\left[\left(1 + \frac{4}{5}\frac{x}{R} + \frac{4}{5}\frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1 - \frac{4}{5}\frac{x}{R} + \frac{4}{5}\frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$

On développe alors B au 4e ordre en $\frac{x}{R}$ et on obtient :

$$\boxed{B = \frac{8\mu_o NI}{5\sqrt{5}R}\left(1 - \frac{144}{125}\frac{x^4}{R^4}\right)}$$

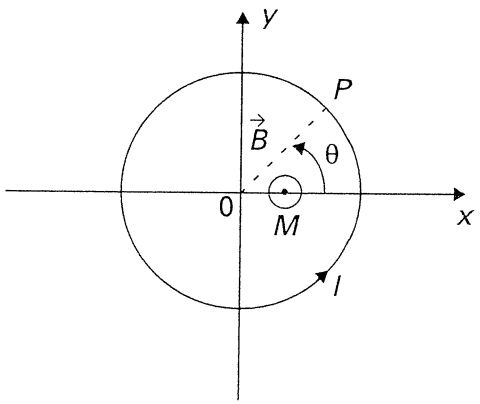
soit aussi

$$\boxed{B = B_o\left(1 - \frac{144}{125}\frac{x^4}{R^4}\right)}$$

Application numérique

$$\frac{\Delta B}{B_o} = \frac{B_o - B}{B_o} = \frac{144}{125}\frac{x^4}{R^4} \text{ soit } \frac{\Delta B}{B_o} \approx 1{,}15{,}10^{-4}$$

07 - Le champ $\overrightarrow{dB}$, créé en M par un élément $\overrightarrow{d\ell}$ centré en P, est perpendiculaire au plan de la spire et orienté vers l'avant dans le cas de figure ci-contre. Il en sera de même de tous les $\overrightarrow{dB}$. Le champ résultant $\vec{B} = \int \overrightarrow{dB}$ sera donc perpendiculaire au plan de la spire et dirigé vers l'avant.



Les coordonnées de P dans le repère $Oxyz$ (Oz perpendiculaire à Oxy tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct) sont $R\cos\theta$, $R\cos\theta$, 0.

Celles de $\overrightarrow{d\ell}$ seront donc $-R\sin\theta\, d\theta$, $R\cos\theta\, d\theta$, 0. Celles de M seront x, 0, 0.

Les composantes de $\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{PM}$ seront donc

$$0,\ 0,\ R^2\, d\theta - Rx\cos\theta\, d\theta$$

d'où la seule composante de $\overrightarrow{dB}$ (suivant Oz) :

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{(R^2 - Rx\cos\theta)\, d\theta}{(x^2 + R^2 - 2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si $x << R$, on fait un développement en $\frac{x}{R}$ (jusqu'au deuxième ordre). Il vient :

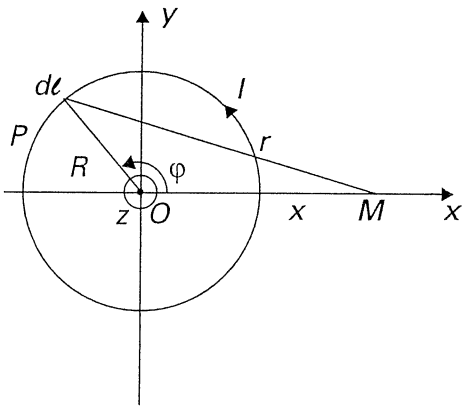
$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi R}\left[1 + \frac{2x}{R}\cos\theta + \frac{3x^2}{4R^2}(1 + 3\cos 2\theta)\right].$$

En intégrant sur θ entre 0 et 2π :

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi R}\left[2\pi + \frac{3x^2}{4R^2}2\pi\right] \text{ soit } \boxed{B = \frac{\mu_o I}{2R}\left(1 + \frac{3x^2}{4R^2}\right)}$$

Si $x = 0$ on retrouve bien $B_o = \frac{\mu_o I}{2R}$ (exercice 3).

08 -



On rapporte l'espace au repère *Ox, Oy, Oz* défini sur la figure ci-dessus.

On a : $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \cdot \frac{\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$.

On a les composantes suivantes :

$$\overrightarrow{OP}\begin{cases} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \vec{r} = \overrightarrow{PM}\begin{cases} x - R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{d\ell}\begin{cases} -R\sin\varphi\, d\varphi \\ R\cos\varphi\, d\varphi \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{d\ell} \wedge \vec{r}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ R(R - x\cos\varphi)\, d\varphi \end{cases}$$

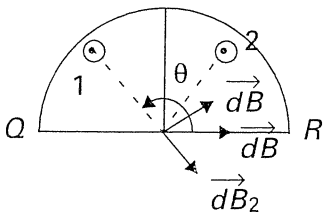
On reporte dans $\overrightarrow{dB}$, on fait un développement limité au premier ordre en $\frac{R}{x}$ et on obtient :

$$dB = \frac{\mu_o I R}{4\pi x^2}\left[-\cos\varphi + \frac{R}{x}(1 - 3\cos^2\varphi) + \ldots\right]$$

Intégrons alors sur φ variant entre O et 2π :

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_o I R^2}{4x^3} \cdot \vec{u}_z}$$ ($\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire de *Oz*).

09 - On considère un élément de courant de surface infinitésimale assimilable à un courant filiforme indéfini.



La figure ci-contre montre que $\vec{B}$ sera porté par la droite perpendiculaire à l'axe passant par les deux extrémités *Q* et *R* du demi-cylindre et aura le sens indiqué ci-dessus si le courant va dans le sens représenté. On a :

$$dB_1 = \frac{\mu_o dI}{2\pi r} = \frac{\mu_o J dS}{2\pi r}.$$

Or, $J = \frac{2I}{\pi a^2}$, a étant le rayon du demi-cylindre. $dS = rdrd\theta$ d'où $dB = \frac{\mu_o I}{\pi^2 a^2} dr \sin\theta d\theta$.

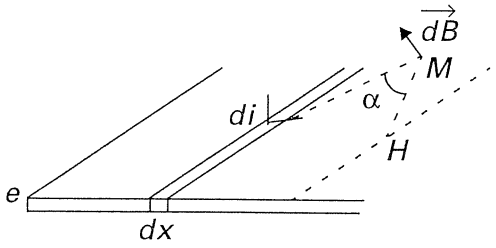
La projection de dB_1 sur la direction résultante sera

$$dB_1 = \frac{\mu_o I}{\pi^2 a^2} drd\theta .$$

En intégrant sur θ entre 0 et π et sur r entre 0 et a, il vient

$$\boxed{B = \frac{2\mu_o I}{\pi^2 a}}$$

10 - On considère une bande de largeur dx, d'épaisseur e, parcourue par un courant d'intensité $di = Jedx$.



On posera $y = HM$, H étant la projection orthogonale de M sur la plaque.

Par raison de symétrie, $\vec{B}$ sera porté par une perpendiculaire à HM. Il n'y a pas de direction privilégiée puisque la plaque est infinie dans toutes ses directions.

On a : $dB = \frac{\mu_o di}{2\pi r} = \frac{\mu_o Jedx}{2\pi r}$

r étant la distance de M à la bande élémentaire.

En projetant $\overrightarrow{dB}$ sur une perpendiculaire à HM en M, il vient :

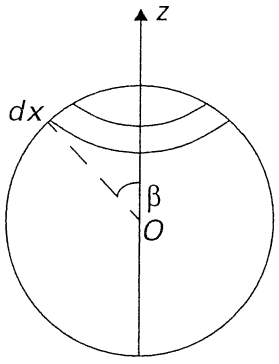
$$dB_1 = dB\cos\alpha = \frac{\mu_o Jedx\cos\alpha}{r}$$

Or, $r = \frac{y}{\cos\alpha}$ $x = y\tan\alpha$ soit $dx = y\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha}$

d'où $dB_1 = \frac{\mu_o Jeyd\alpha}{2\pi y}$

soit finalement en intégrant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$: $\boxed{B = \frac{\mu_o Je}{2}}$

11 - On sait que pour une spire $B = \frac{\mu_o I}{2R}\sin^3\beta$.



Soit une spire de rayon r, de largeur dx prise sur la sphère. La vitesse des charges sur cette spire est $v = \omega r$.

Pendant dt, elles se déplacent de

$$dh = \omega r dt.$$

On a donc $d^2q = \omega r \sigma dx dt$ et donc $dI = \dfrac{d^2q}{dt} = \omega r \sigma dx$.

Calculons B en O. On repère la spire par β :

$$dB = \frac{\mu_o}{2r} dI \sin^3\beta = \frac{\mu_o}{2r}\omega r \sigma \sin^3\beta\, dx.$$

Or, $dx = Rd\theta$. Donc : $dB = \dfrac{\mu_o \omega \sigma R}{2}\sin^3\beta\, d\beta$.

On intègre sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on multiplie par 2 :

$$B = \mu_o \omega \sigma R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\beta\, d\beta$$

or, $\int \sin^3\beta\, d\beta = -\dfrac{3}{4}\cos\beta + \dfrac{1}{12}\cos 3\beta$ d'où $\boxed{B = \dfrac{2\mu_o \sigma \omega R}{3}}$

12 - On considère un anneau élémentaire compris entre les cercles de rayon x et $x + dx$. Soit I l'intensité totale du courant. L'anneau élémentaire a une résistance

$$R = \rho \frac{2\pi x}{dx}$$

ρ étant la résistivité du matériau. Soit J la densité de courant traversant l'anneau :

$$V_A - V_B = \rho \cdot \frac{2\pi x}{dx} \cdot J \cdot dx$$
$$V_A - V_B = \rho 2\pi x J.$$

Soit R_T la résistance totale du disque : $V_A - V_B = R_T \cdot I$ d'où $J = \dfrac{k}{x}$

k étant une constante à déterminer. Pour cela on écrit :

$$I = \int_{r-a}^{r+a} J dx = k \ln \frac{r+a}{r-a}$$

d'où $Jdx = \dfrac{I}{\ln \dfrac{r+a}{r-a}} \cdot \dfrac{dx}{x}$.

Par suite :

$$dB = \frac{\mu_o J dx}{2x} = \frac{\mu_o I}{2 \ln \dfrac{r+a}{r-a}} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

Soit finalement

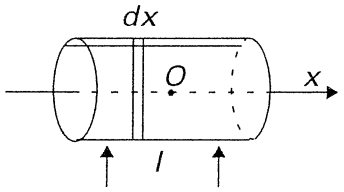
$$\boxed{B = \frac{\mu_o I a}{(r^2 - a^2) \ln \frac{r+a}{r-a}}}$$

Si $r >> 2a$ en faisant un développement limité au 1er ordre en $\frac{a}{r}$ il vient :

$$\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2r}}$$

On retrouve le cas de la spire filiforme.

13 - Par raison de symétrie, le courant est uniformément réparti, donc la densité de courant est



$$J = \frac{I}{2b} .$$

Considérons une tranche de largeur dx à la distance x de O. Elle crée un champ :

$$dB = \frac{\mu_o}{2r} \cdot \frac{I}{2b} dx \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right)^3$$

d'où $B = \frac{\mu_o I r^2}{4b} \int_{-b}^{+b} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$.

Posons $\frac{x}{r} = u$. Il vient :

$$B = \frac{\mu_o I}{4b} \int_{-\frac{b}{r}}^{+\frac{b}{r}} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} .$$

Or, $\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int \frac{1 + u^2 - u^2}{(1+u^2)^{3/2}} d\mu = \int \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}} du - \int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^{3/2}}$.

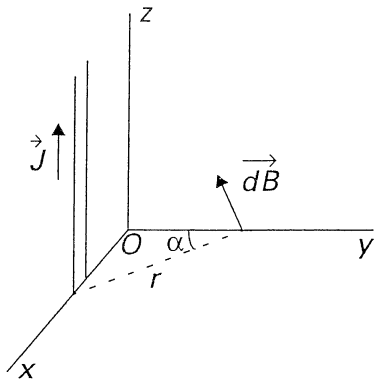
En intégrant par parties, il vient finalement :

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B = \frac{u_o I}{2\sqrt{b^2 + r^2}}}$$

Si $b >> r$ $B \approx \frac{u_o I}{2b}$

Si $b << r$ $B \approx \frac{u_o I}{2r}$

14 - Par raison de symétrie, $\vec{B}$ est parallèle à la nappe de courant et à Ox. $\vec{B}$ est dirigé dans le sens $-\overrightarrow{Ox}$ si $\vec{J}$ est dirigé dans le sens $+\overrightarrow{Oz}$. Pour un fil de largeur dx :



$$dB = \frac{\mu_o}{2\pi r} J dx$$

Or, $r = \dfrac{y}{\cos\alpha}$ $x = y\tan\alpha$ soit $dx = \dfrac{y d\alpha}{\cos^2\alpha}$

et $dB = \dfrac{\mu_o J d\alpha}{2\pi\cos\alpha}$.

La projection dB_x de $\overrightarrow{dB}$ sur Ox a pour valeur absolue $dB_x = dB\cos\alpha$ soit $dB_x = \dfrac{\mu_o J d\alpha}{2\pi}$.

On obtient B en intégrant sur α entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ d'où $B = \dfrac{\mu_o J}{2}$.

Or, $\vec{J} = J \cdot \vec{u}_z$ $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire de Oz.

$\vec{B} = -B \cdot \vec{u}_x$ $\vec{u}_x$ étant le vecteur unitaire de Ox.

Comme $-\vec{u}_x = u_z \wedge \vec{n}$, $\vec{n}$ étant l'unitaire de Oy :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{u_o \vec{J} \wedge \vec{n}}{2}}$$

2 – On a pour une surface élémentaire :

$dS = dx \cdot v dt$ $d^2Q = \sigma dS$ d'où $dI = \sigma v dx$ et $J = \dfrac{dI}{dx}$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{v}}$$

3 – On reporte dans $\vec{B}$: $\vec{B} = \dfrac{\mu_o}{2}\sigma \vec{v} \wedge \vec{n}$.

Pour un plan, $\vec{E}$ est normal et vaut $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} \cdot \vec{n}$

Comme $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$, il vient :

$$\boxed{B = \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}}$$

15 - On a évidemment : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r^3}\vec{r}$

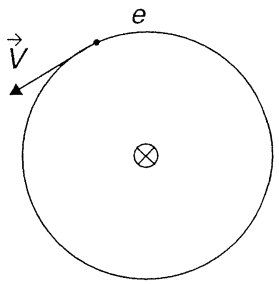
$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{v} \wedge \frac{\vec{qr}}{r^3}$$

ou $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\vec{v} \wedge 4\pi\varepsilon_o \vec{E}$ donc $\vec{B} = \varepsilon_o \mu_o \vec{v} \wedge \vec{E}$

or, $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$ d'où $\boxed{B = \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}}$

expression valable même en relativité bien qu'alors les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ soient différentes.

16 - On sait qu'on a l'équivalence $i\vec{d\ell} = -\vec{ev}$, e étant la valeur absolue de la charge de l'électron, donc :



$$\vec{B} = -\frac{\mu_o}{4\pi} e \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

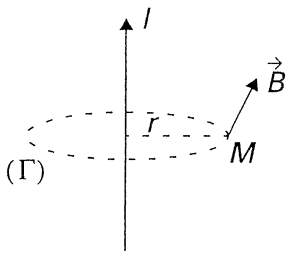
Le mouvement étant circulaire de rayon a : $\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o a^2}$ d'où $v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o am}$ (le mouvement est aussi uniforme).

Donc $B^2 = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)^2 \frac{e^4}{4\pi\varepsilon_o m a^5}$ or, $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$

donc finalement $\boxed{B = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^2 c}{(ma^5)^{1/2}}}$

Application numérique $\boxed{B = 12{,}5\ \text{T}}$

17 - On prend comme contour (Γ) un cercle centré sur le fil passant par le point M considéré. En tout point de (Γ), $\vec{B}$ a même module et est tangent à (Γ).



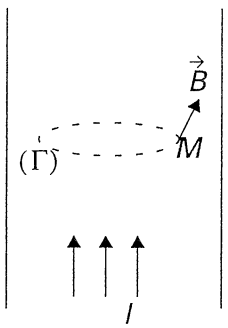
Donc $\oint_{(r)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \int_{(r)} B\,d\ell = B \int_{(r)} d\ell = B \cdot 2\pi r$

de plus $\oint_{(r)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_o I$ d'où $\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}}$

18 - 1 – *Point intérieur au câble.*

La densité de courant est $J = \frac{I}{\pi R^2}$

On prend comme contour (Γ) un cercle centré sur l'axe du câble de rayon r.



$\vec{B}$ a même module en tout point de (r) et est tangent (par raison de symétrie) donc

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B \cdot 2\pi r$$

de plus $\Sigma \cdot I_i = J \cdot \pi r^2 = I \cdot \dfrac{r^2}{R^2}$

d'où par application du théorème d'Ampère : $B \cdot 2\pi r = \mu_o I \dfrac{r^2}{R^2}$

soit $\boxed{B = \dfrac{\mu_o I r}{2\pi R^2}}$

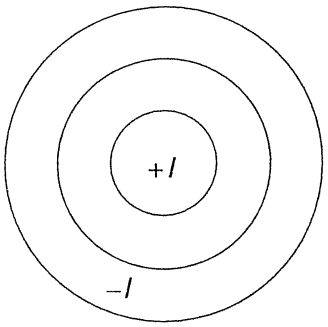
2 – *Point extérieur au câble*

De même que ci-dessus, on a $\oint_{(r)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B 2\pi r$

et $\Sigma I_i = I$ d'où $\boxed{B = \dfrac{\mu_o I}{2\pi r}}$. On constate que pour $r = R$: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ dans les deux cas.

B est donc continu lors du passage du conducteur au vide. Ce résultat est général.

19 - Les lignes du champ, par symétrie, seront des cercles centrés sur l'axe et situées dans des plans perpendiculaires à l'axe. On applique le théorème d'Ampère :



$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_o \Sigma I$$

ΣI représentant la somme des courants traversant le contour Γ ; un sens positif pour I ayant été choisi.

$\underline{r > R_3}$: $\Sigma I = I - I = 0$ $\oint_{(r)} \vec{B} \vec{d\ell} = B_1 \oint_{(r)} d\ell$ d'où $\boxed{B_1 = 0}$

$\underline{R_2 < r < R_3}$: $B_2 2\pi r = \mu_o \left[I - I \dfrac{\pi (r^2 - R_2^2)}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \right]$

soit $\boxed{B_2 = \dfrac{\mu_o I (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}}$

$\underline{R_1 < r < R_2}$

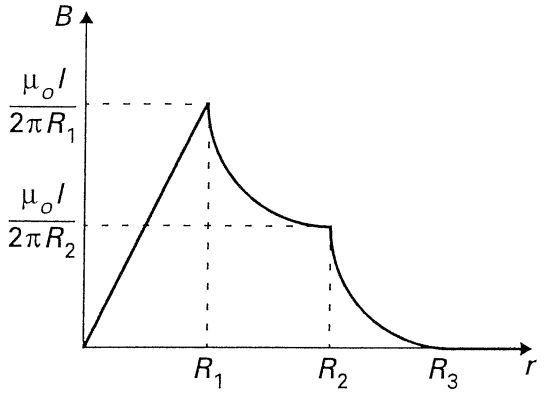
$\boxed{B_3 = \dfrac{\mu_o I}{2\pi r}}$

$\underline{r < R_1}$ $B_4 \cdot 2\pi r = \mu_o \dfrac{I \pi r^2}{\pi R_1^2}$ soit $\boxed{B_4 = \dfrac{\mu_o I r}{2\pi R_1^2}}$

On observe que B est bien continue pour

$$r = R_1 \left(B_4 = \frac{\mu_o I}{2\pi R_1} \right), \qquad r = R_2 \left(B_2 = B_3 = \frac{\mu_o I}{2\pi R_2} \right) \qquad \text{et } r = R_3 \, (B_2 = B_1 = 0)$$

Pour $B(r)$ on obtient la courbe suivante :

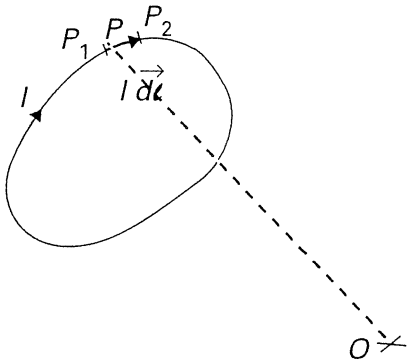


9 DIPÔLE MAGNÉTIQUE

1. Moment magnétique d'un circuit filiforme
2. Champ magnétique créé par une spire circulaire à grande distance
3. Définition du dipôle magnétique
4. Lignes de champ du dipôle magnétique
5. Positions principales de Gauss
6. Action d'un champ magnétique uniforme sur un dipôle

1 - MOMENT MAGNÉTIQUE D'UN CIRCUIT FILIFORME

Soit (C) un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}$.



La force de Laplace agissant sur un élément de longueur $d\ell$ est :

$$\overrightarrow{df} = I\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B}$$

Le circuit est soumis à la force résultante

$$\vec{f} = \oint_{(C)} \overrightarrow{df}. \text{ Or, } \vec{f} = I\left(\oint_{(C)} \overrightarrow{d\ell} \right) \wedge \vec{B} = 0 \text{ car}$$

$\oint \overrightarrow{d\ell} = 0$. Donc, **le torseur des forces de Laplace agissant sur un circuit fermé placé dans un champ magnétique extérieur uniforme est équivalent à un couple.**

Le moment résultant du torseur peut être calculé en n'importe quel point.

Soit $\vec{\Gamma}_0$ le moment résultant du torseur en O.

Le moment en O de $\overrightarrow{df}$ agissant sur $d\ell$ est :

$$d\vec{\Gamma}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{df}$$

Soit $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$.

Donc :

$$d\vec{\Gamma}_0 = \vec{r} \wedge [I\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B}]$$
$$= I[(\vec{r}.\vec{B})\,\overrightarrow{d\ell} - (\vec{r}.\overrightarrow{d\ell})\,.\vec{B}]$$

(en utilisant la formule du double produit vectoriel). Or :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{d\ell} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

$$= d(\overrightarrow{OP})$$

$$= d\vec{r}$$

Donc :

$$d\vec{\Gamma}_0 = I[(\vec{r}.\vec{B})\,\vec{dr} - (\vec{r}.\vec{dr})\,\vec{B}],\ \vec{r}.\vec{dr} = \frac{1}{2}d(r^2)$$

$$d\vec{\Gamma}_0 = I\left[(\vec{r}.\vec{B})\,\vec{dr} - \frac{1}{2}d(r^2)\,\vec{B}\right]$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \oint_{(C)} d\vec{\Gamma}_0 = I\oint_{(C)} (\vec{r}.\vec{B})\,\vec{dr} - \frac{1}{2}\vec{B}\underbrace{\oint_{(C)} d(r^2)}$$

$= 0$ puisque le circuit est fermé

donc :

$$\vec{\Gamma}_0 = I\oint_{(C)} (\vec{r}.\vec{B})\,\vec{dr} \quad (1)$$

On calcule :

$$d\,[(\vec{r}.\vec{B}).\vec{r}] = (\vec{r}.\vec{B})\,\vec{dr} + \vec{r}\ d(\vec{r}.\vec{B})$$

$$= (\vec{r}.\vec{B})\,\vec{dr} + \vec{r}\underbrace{[\vec{r}.d\vec{B}}_{=0 \text{ car } \vec{B} \text{ uniforme}} + \vec{B}\ d\vec{r}]$$

$$= (\vec{r}.\vec{B})\,d\vec{r} + \vec{r}(\vec{B}.d\vec{r})$$

donc :

$$\vec{\Gamma}_0 = I\underbrace{\oint_{(C)} d[(\vec{r}.\vec{B})\,\vec{r}]}_{=0} - I\oint_{(C)} \vec{r}\,(\vec{B}.d\vec{r}) \quad (2)$$

Additionnons (1) et (2) :

$$2\vec{\Gamma}_0 = I\oint_{(C)} (\vec{r}.\vec{B})\,dr - \vec{r}\,(\vec{B}.dr)$$

$$= I\oint_{(C)} \vec{B}\wedge(d\vec{r}\wedge\vec{r})$$

$$= I\vec{B}\wedge\oint_{(C)} (d\vec{r}\wedge\vec{r})$$

$$= I[\oint_{(C)} (\vec{r}\wedge d\vec{r})]\wedge\vec{B}$$

L'aire balayée par OP au cours du déplacement élémentaire est :

$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge d\vec{r}\right|$$

Soit $\overrightarrow{dS}$ le **vecteur surface** défini par $\overrightarrow{dS} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{dr}$,

donc $\frac{1}{2}\oint_{(C)} \vec{r} \wedge \vec{dr} = \oint_{(C)} \overrightarrow{dS} = \vec{S}$, vecteur surface de (C).

Par définition, on appelle **moment magnétique du circuit** (C) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\vec{S}}$$

donc :

$\boxed{\vec{\Gamma}_0 = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}}$ avec $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} I \oint_{(C)} \vec{r} \wedge \vec{dr}}$

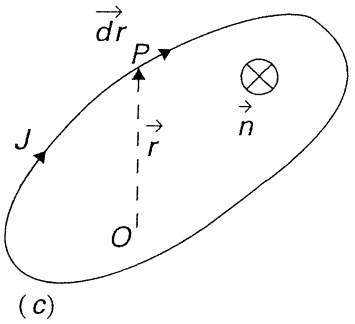
Unité de $\mathcal{M}$. – Dans le Système International, le module de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ s'exprime en $A.m^{-2}$.

Il est évident que le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ ne dépend pas de l'origine O choisie car le moment en O du torseur des forces de Laplace est indépendant de cette origine O.

Cas particulier d'un circuit filiforme plan

Supposons maintenant que le circuit filiforme soit plan. Puisque l'origine O est quelconque, on peut prendre ce point dans le plan du circuit.

Alors, les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{dr}$ sont situés dans le plan quel que soit P. Le produit vectoriel est alors perpendiculaire au plan et orienté par le sens du courant I par la règle du trièdre direct. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale au plan du circuit orienté par la règle du trièdre direct et soit S l'aire limitée par le circuit. Le moment magnétique du circuit est alors

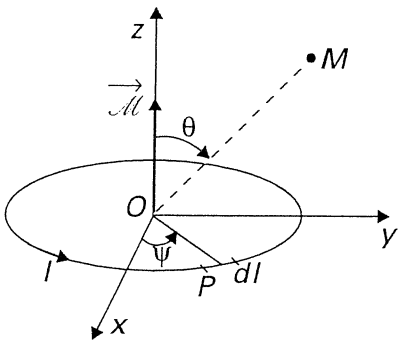


$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = IS\vec{n}}$$

2 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPIRE CIRCULAIRE À GRANDE DISTANCE

Soit une spire circulaire, de centre O, de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I. Soit Oz l'axe perpendiculaire au plan de la spire orienté par le sens du courant. Le moment magnétique de la spire est :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\pi R^2 \vec{u}_z$$



Posons $OM = r >> R$, rayon de la spire.

Soit le trièdre orthonormé direct Oxyz tel que :

- Ox et Oy appartiennent au plan de la spire ;
- les sens des axes soient tels que Oz ait même sens que $\vec{\mathcal{M}}$;
- M appartienne au plan yOz.

Soient : $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$

$\psi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$

L'élément de courant $I.\overrightarrow{d\ell}$ centré en P crée en M un champ magnétique $\overrightarrow{dB}$ donné par la loi de Biot et Savart.

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \overrightarrow{d\ell} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Le plan yOz est un plan d'antisymétrie, le champ résultant $\vec{B}$ est donc contenu dans ce plan. Il s'en suit que la composante B_x sera nulle. Il est logique, plutôt que de rester en coordonnées cartésiennes, de passer aux coordonnées sphériques. Dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$, $\vec{B}$ ne possèdera que deux composantes B_r et B_θ. C'est dans cette base que nous exprimerons le résultat final, mais, pour des raisons de calcul nous resterons pour l'instant dans le repère cartésien. Les différents points et vecteurs ont les coordonnées ou composantes suivantes :

$$P\begin{vmatrix} R\cos\psi \\ R\sin\psi \\ 0 \end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix} 0 \\ R\sin\theta \\ R\sin\theta \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{d\ell}\begin{vmatrix} -R\sin\psi\, d\psi \\ R\cos\Psi\, d\psi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{dM}\begin{vmatrix} -R\cos\Psi \\ r\sin\theta - R\sin\psi \\ r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + r^2 - 2Rr\sin\theta\sin\psi)^{3/2}} \begin{vmatrix} Rr\cos\theta\cos\psi\, d\psi \\ Rr\cos\theta\sin\psi\, d\psi \\ -Rr\sin\theta\sin\psi\, d\psi + R^2 d\psi \end{vmatrix}$$

Nous ne nous intéressons qu'aux deux dernières composantes

$$* \; B_y = \frac{\mu_0 IRr\cos\theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\psi\, d\psi}{(R^2 + r^2 - 2Rr\sin\theta\sin\psi)^{3/2}} .$$

Comme $r >> R$, faisons un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{R}{r}$

$$(R^2 + r^2 - 2Rr \sin\theta \sin\psi)^{-3/2} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{2R}{r} \sin\theta \sin\psi + \frac{R^2}{r^2}\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\frac{R}{r} \sin\theta \sin\psi\right).$$

Donc

$$B_y = \frac{\mu_o I R r \cos\theta}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\frac{R}{r} \sin\theta \sin\psi\right) \sin\psi \, d\psi$$

$$B_y = \frac{\mu_o I R r \cos\theta}{4\pi r^3} \; 3\frac{R}{r} \sin\theta \; \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\psi \, d\psi}_{\pi}$$

$$B_y = \frac{3\mu_o I R^2 \sin\theta \cos\theta}{4r^3}$$

$$* \; B_z = \frac{\mu_o I}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} (-Rr \sin\theta \sin\psi + R^2)\left(1 + 3\frac{R}{r} \sin\theta \sin\psi\right) d\psi$$

$$B_z = \frac{\mu_o I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R}{r} \sin\theta \sin\psi + \frac{R^2}{r^2}\right)\left(1 + 3\frac{R}{r} \sin\theta \sin\psi\right) d\psi \, .$$

On se limite au premier ordre non nul

$$B_z = \frac{\mu_o I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2\theta \sin^2\psi) \, d\psi$$

$$B_z = \frac{\mu_o I R^2}{4r^3} (2 - 3 \sin^2\theta) \, .$$

Soient B_r et B_θ les composantes de $\vec{B}$ qui nous intéressent :

$$B_r = B_z \cos\theta + B_y \sin\theta$$

$$B_r = \frac{\mu_o I R^2 \cos\theta}{2r^3}$$

$$B_\theta = B_y \cos\theta - B_z \sin\theta$$

$$B_\theta = \frac{\mu_o I R^2 \sin\theta}{4r^3} \, .$$

Le champ magnétique créé au point M, très lointain de O est donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I R^2 \cos\theta}{2r^3} \vec{u_r} + \frac{\mu_o I R^2 \sin\theta}{4r^3} \vec{u_\theta} \, .$$

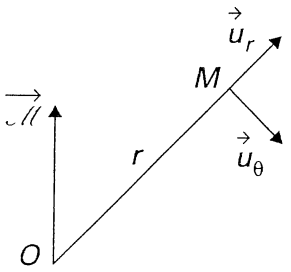
En introduisant le moment magnétique $\mathcal{M}$ de la spire $\mathcal{M} = IS = I\pi R^2$, il vient

$$\vec{B} = \frac{\mu_o \mathcal{M} \cos\theta}{2\pi r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_o \mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^3} \vec{u}_\theta$$

3 - DÉFINITION DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE

Les calculs précédents permettent d'introduire le modèle du *dipôle magnétique*.

On appelle *dipôle magnétique* tout circuit, de quelque forme que ce soit, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tel que le champ magnétique créé *à grande distance* s'écrive :



$$\vec{B} = \frac{\mu_o \mathcal{M} \cos\theta}{2\pi r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_o \mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^3} \vec{u}_\theta$$

$r, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ étant repéré à partir du vecteur moment magnétique comme indiqué ci-dessus.

4 - LIGNES DE CHAMP DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE

Dans le plan défini par $\vec{\mathcal{M}}$ et *OM* l'équation différentielle des lignes de champ s'écrit :

$$\frac{dr}{\frac{\mu_o \mathcal{M} \cos\theta}{2\pi r^3}} = \frac{r d\theta}{\frac{\mu_o \mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^3}}$$

soit

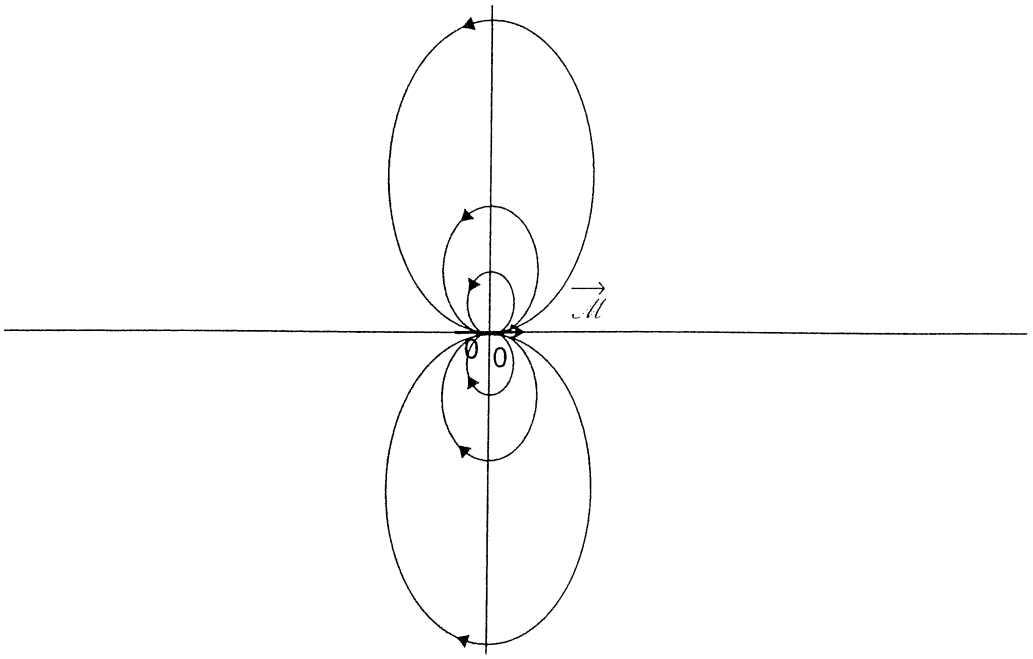
$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos\theta d\theta}{\sin\theta}.$$

L'équation polaire des lignes de champ est, par suite

$$r = C.\sin^2\theta$$

On obtient la même équation que pour les lignes de champ électrostatique du dipôle électrostatique.

On a représenté ci-dessous quelques-unes de ces lignes



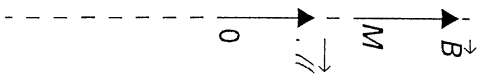
5 - POSITIONS PRINCIPALES DE GAUSS

Il existe deux types de positions principales de Gauss

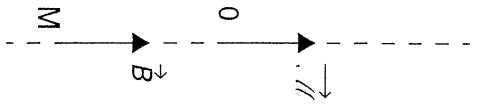
1. Premières positions principales de Gauss

Elles correspondent à $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

■ $\theta = 0, B_r = \dfrac{\mu_o \mathcal{M}}{2\pi r^3}, B_\theta = 0$



■ $\theta = \pi, B_r = -\dfrac{\mu_o \mathcal{M}}{2\pi r^3}, B_\theta = 0$



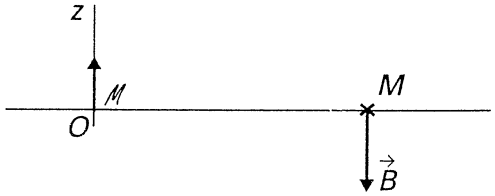
Donc, $\vec{B}$ est parallèle à $\vec{\mathcal{M}}$ et de même sens

$$\vec{B} = \frac{\mu_o \vec{\mathcal{M}}}{2\pi r^3}$$

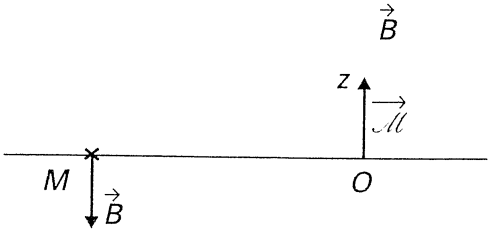
2. Secondes positions principales de Gauss

Elles correspondent à $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

■ $\theta = \dfrac{\pi}{2}, B_r = 0, B_\theta = \dfrac{\mu_o \mathcal{M}}{4\pi r^3}$



■ $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $B_r = 0$, $B_\theta = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}$



B est parallèle à $\vec{\mathcal{M}}$ et de même sens contraire

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{4\pi r^3}$$

6 - ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME SUR UN DIPÔLE

On a défini le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ d'un circuit par la relation :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Cette relation caractérise, par conséquent, l'action d'un champ magnétique sur un dipôle.

Remarquons cependant que ceci nécessite que le champ magnétique soit uniforme. Dans le cas contraire, existerait de plus une résultante générale $\vec{F}$ du torseur des forces de Laplace. Néanmoins, dans la majorité des cas pratiques, étant donné que les dimensions du dipôle sont très petites devant la distance à laquelle on en étudie les effets, on peut considérer que *sur le dipôle,* $\vec{B}$ est à peu près constant.

Annexe
L'ENREGISTREMENT MAGNÉTIQUE

L'enregistrement sur bande magnétique utilise la propriété de certains matériaux de s'aimanter lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique. Ils sont alors transformés en aimants permanents (du moins tant que l'on ne procède pas à la désaimantation par une opération inverse) et constituent ainsi de petits dipôles magnétiques.

L'enregistrement audio sur une bande magnétique telle que celle utilisée dans les lecteurs de cassettes se fait grâce à trois électroaimants appelés *têtes magnétiques*.

– *la tête d'effacement* supprime tout signal qui aurait été enregistré préalablement sur la bande. La bobine de l'électroaimant qui l'équipe est parcourue par un courant alternatif de haute fréquence.

– *la tête d'enregistrement* crée dans l'entrefer de l'électroaimant un champ magnétique proportionnel à l'intensité du courant qui la traverse, laquelle est proportionnelle à l'intensité et à la fréquence du signal audio. Pour éviter des déformations des signaux, on superpose, à ce courant, un courant dit de polarisation, sinusoïdal et fourni par le même oscillateur que celui qui alimente la tête d'effacement.

– *la tête de lecture* lit l'enregistrement et envoie dans le circuit d'amplification un courant qui reproduit ce qui a été inscrit sur la bande magnétique.

La bande magnétique est constituée d'un ruban plastique recouvert d'une couche d'oxyde de fer (ou autre métal convenablement choisi), les cristaux correspondants étant pris dans un liant. Le fer prend une aimantation proportionnelle au champ magnétique dans lequel il se trouve. Cette aimantation est rémanente et garde donc en mémoire l'information tant que ne se produit pas la désaimantation. Celle-ci peut être réalisée lors de la réutilisation de la bande. Elle peut aussi se produire spontanément si la bande est placée par inadvertance dans un champ magnétique intense : il est, par exemple, inadapté de ranger des bandes magnétiques près d'un haut-parleur équipé d'un puissant aimant. La vitesse de défilement de la bande conditionne la qualité de l'enregistrement : la vitesse standard de 4,75 $cm.s^{-1}$ permet une reproduction correcte, mais sans plus ; les magnétophones haute-fidélité ont des vitesses de défilement de 19 $cm.s^{-1}$ ou 38 $cm.s^{-1}$.

Les magnétoscopes fonctionnent sur un principe similaire ; mais les fréquences mises en jeu sont beaucoup plus élevées que pour les signaux audio. Alors que pour ceux-ci la fréquence est inférieure à 20 kHz, pour les signaux vidéo elle est de quelques mégahertz à une dizaine de mégahertz. Cela complique les choses : la vitesse de défilement de la bande est beaucoup plus grande, les têtes magnétiques sont rotatives et se déplacent perpendiculairement à la bande.

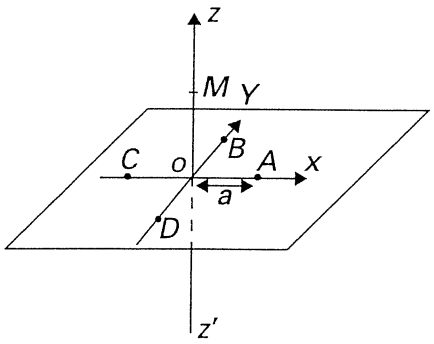
10 QUELQUES PROBLÈMES

1. Champ créé par quatre charges disposées aux sommets d'un carré
2. Champ et potentiel créés par une distribution sphérique et des distributions planes.
3. Champ et potentiel créés par des fils
4. Étude d'une distribution de charges à symétrie sphérique
5. Production d'un champ magnétique uniforme
6. Modélisation du champ magnétique terrestre

Nous terminons cet ouvrage par quelques problèmes ou parties de problèmes données à des concours. Comme d'habitude, les énoncés ont été scrupuleusement respectés aussi bien pour le texte que pour les notations.

1 - CHAMP CRÉÉ PAR QUATRE CHARGES DISPOSÉES AUX SOMMETS D'UN CARRÉ

Énoncé



Dans tout le problème on néglige l'action de la pesanteur.

Partie I - Soient quatre charges ponctuelles + q disposées aux sommets d'un carré de côté $a\sqrt{2}$, de centre O, dans le plan (Ox, Oy).

L'axe Oz est perpendiculaire à ce plan et tel que le trièdre trirectangle (Ox, Oy, Oz) soit direct.

Les vecteurs unitaires portés par les trois axes sont respectivement $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

01- Déterminer le vecteur champ électrostatique en O.

02- Déterminer le potentiel électrostatique V en un point M de l'axe $z'Oz$.

03 - Déterminer les composantes $\bar{E}_x$, $\bar{E}_y$, $\bar{E}_z$ du vecteur champ électrique $\vec{\bar{E}}_M$ régnant en M.

04 -Tracer les graphes du potentiel V et de $\bar{E}_z$ en fonction de z. (On précisera les points remarquables : maxima, points d'inflexion, limites...)

05 - On place en O un point matériel chargé, de charge q', de masse m. Montrer que cette charge est en équilibre. Quelle condition doit remplir q' pour que l'équilibre soit stable pour des déplacements suivant $z'Oz$?

06 - La condition précédente étant remplie, déterminer la période des oscillations de très faible amplitude au voisinage de O, le long de $z'Oz$.

Partie II - On se propose d'étudier le potentiel électrostatique au voisinage du point O, c'est-à-dire pour des points M de coordonnées x, y, z telles que $x << a$; $y << a$; $z << a$.

01 - Exprimer le potentiel créé en M par l'ensemble des quatre charges en fonction de x, y, z, a et q.

02 - Exprimer les composantes de $\vec{E}_x$, $\vec{E}_y$, $\vec{E}_z$ du champ électrostatique $\vec{E}$ au point M.

03 - En déduire l'équation des lignes du champ dans le plan xOy.

04 - Représenter, toujours au voisinage de O et dans le plan xOy, les lignes équipotentielles et les lignes de champ. Orienter ces dernières.

Partie III - Déterminer l'équation de la trajectoire d'un point matériel chargé, de masse m, de charge $+Q$, au voisinage de O dans le plan xOy.

À l'origine des temps, la charge occupe la position $M_0\,(x_0 \neq 0,\ y_0 = 0)$ et son vecteur vitesse est $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{j}$

(ENSAM)

SOLUTION

Partie I

01 - $\boxed{\vec{E} = 0}$ (évident)

02 - $V = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0 MA}$ $\qquad MA = \sqrt{a^2 + z^2}$ $\qquad \boxed{V = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}}$

03 - $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \rightarrow$ Seule composante suivant z : $\vec{E}_x = \vec{E}_y = 0$

$$\vec{E}_z = -\frac{q}{\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_z = \frac{qz}{\pi\varepsilon_0\,(a^2 + z^2)^{3/2}} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{qz}{\pi\varepsilon_0\,(a^2 + z^2)^{3/2}}\,\vec{k}}$$

04 - V maximum pour $\dfrac{dV}{dz} = 0$, c'est-à-dire pour $E_z = 0$ donc $z = 0$.

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + z\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}\right]$$

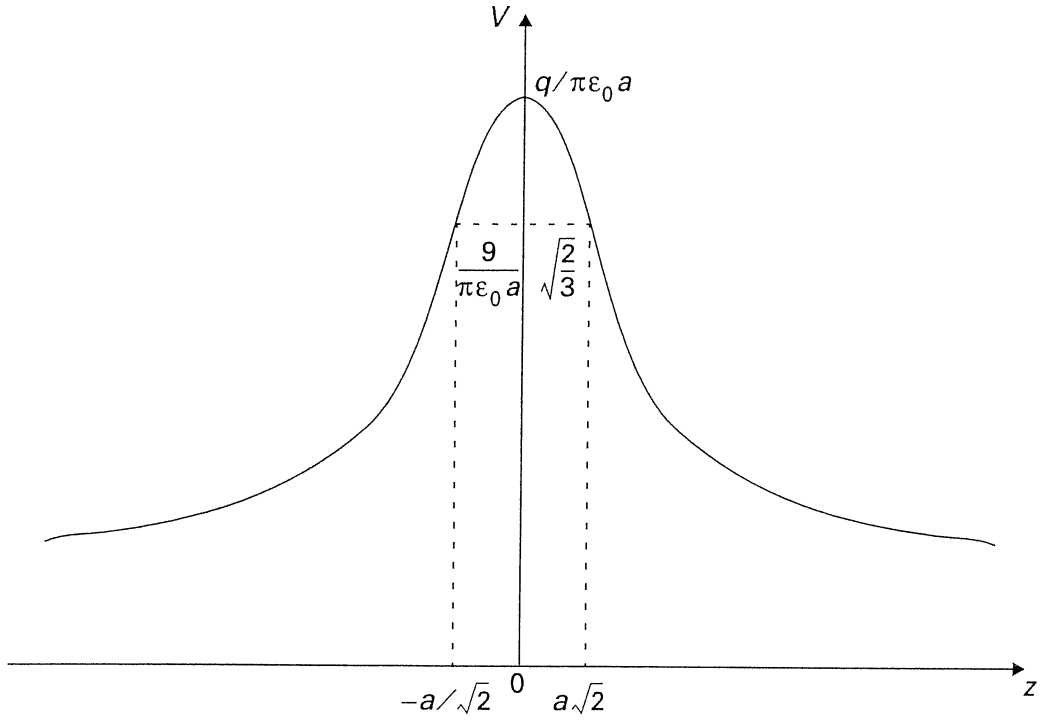
$$= \frac{q}{\pi\varepsilon_0\,(a^2 + z^2)^{5/2}}\,[a^2 + z^2 - 3z^2] = 0 \qquad \text{pour } 2z^2 = a^2$$

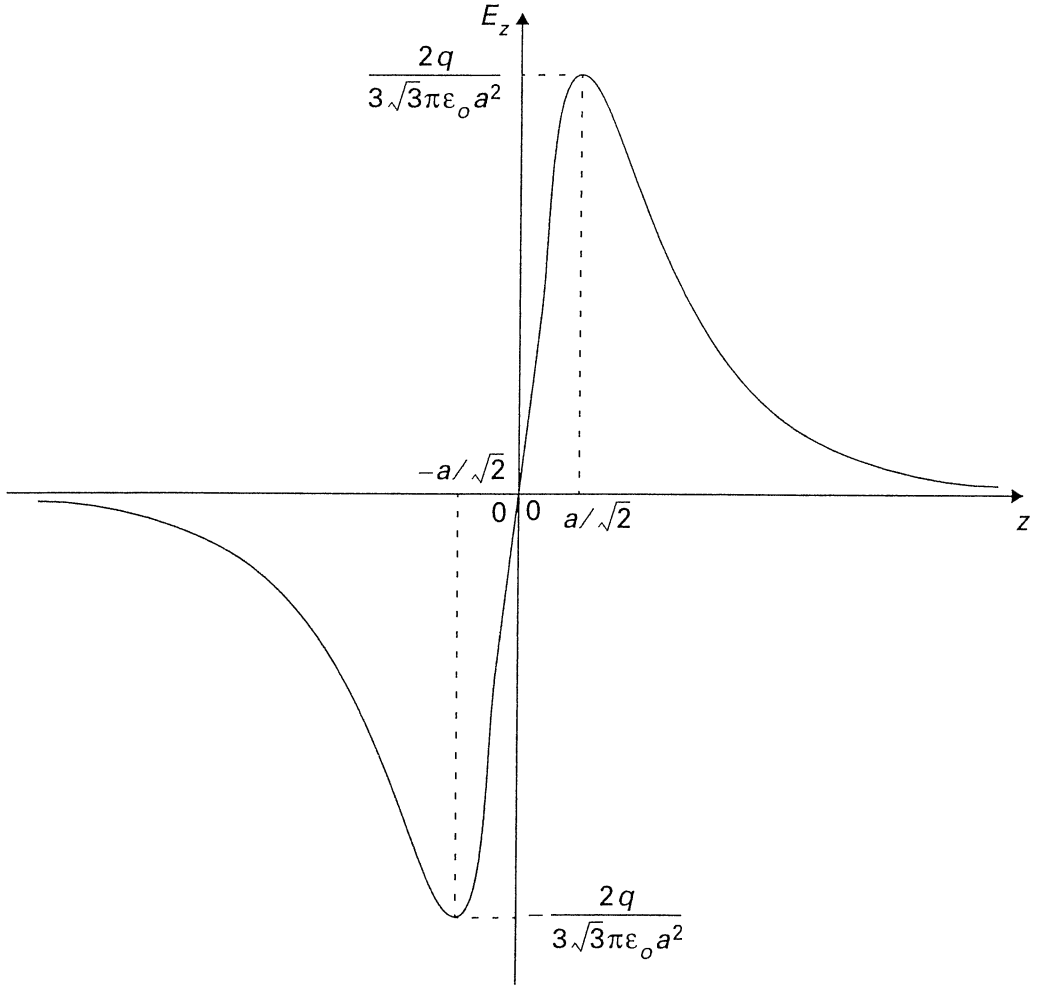
$$\text{soit } z = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Pour $z = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ $\qquad V = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{\dfrac{3a^2}{2}}} = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

et $\qquad E_z = \pm\dfrac{2q}{3\varepsilon_0 a^2\sqrt{3}}$

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives de $V(z)$ et $E_z(z)$.





05 - $\vec{f} = q'\vec{E}$. En O, $\vec{E} = 0$ donc $\vec{f} = 0$: la charge est en équilibre. Si on écarte légèrement la charge de O suivant $z'Oz$, il naît une force $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \frac{qq'z\vec{k}}{\pi\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Si $z > 0$, $\vec{f}$ est une force de rappel si $q' < 0$.

Si $z < 0$, $\vec{f}$ est une force de rappel si $q' < 0$.

Dans les deux cas, l'équilibre est stable si

$$\boxed{q' < 0}$$

06 - On écrit le principe fondamental de la dynamique $\vec{f} = m\vec{a}$ donc

$$\frac{qq'z\vec{k}}{\pi\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} = m\ddot{z}\vec{k}.$$

Si $z << a$ $\quad \frac{qq'z}{\pi\varepsilon_0 a^3} \approx m\ddot{z}$

$$\ddot{z} = -\frac{q|q'|}{m\pi\varepsilon_0 a^3} z \quad \text{(puisque } q' < 0\text{)}.$$

La charge est donc animée d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω telle que :

$$\omega^2 = \frac{q|q'|}{m\pi\varepsilon_0 a^3} = -\frac{qq'}{m\pi\varepsilon_0 a^3} \text{ d'où la période}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m\pi\varepsilon_0 a^3}{q|q'|}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\pi\varepsilon_0 a^3}{-qq'}}}$$

Partie II

01 - Soient x, y, z les coordonnées de M.

On a :

$$\overrightarrow{MA}\begin{vmatrix} x-a \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \text{d'où} \quad MA = \sqrt{x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + z^2}$$

$$\text{Soit} \quad MA = a\sqrt{1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}}$$

$$\overrightarrow{MB}\begin{vmatrix} x \\ y-a \\ z \end{vmatrix} \quad \text{Soit} \quad MB = a\sqrt{1 - \frac{2y}{a} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}}$$

$$\overrightarrow{MC}\begin{vmatrix} x+a \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \text{Soit} \quad MC = a\sqrt{1+\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}$$

$$\overrightarrow{MD}\begin{vmatrix} x \\ y+a \\ z \end{vmatrix} \quad \text{Soit} \quad MD = a\sqrt{1+\frac{2y}{a}+\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}$$

Or $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}\right].$$

En développant en deuxième ordre en $\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}$, on a :

$$\frac{1}{MA} = \frac{1}{a}\left[1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right]^{-1/2} = \frac{1}{a}\left[1+\frac{x}{a}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2}\right]$$

et de même pour les autres longueurs. D'où

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[4-\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{2a^2}+3\frac{x^2}{a^2}+3\frac{y^2}{a^2}\right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[4+\frac{2x^2+2y^2+4z^2}{2a^2}\right]$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[4+\frac{x^2+y^2-2z^2}{a^2}\right]}$$

02 - On en déduit

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2x}{a^2}\right)$$

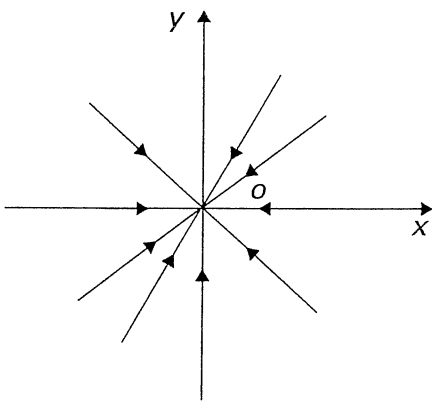
donc $$\boxed{\vec{E}_x = -\frac{qx}{2\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

de même : $$\boxed{\vec{E}_y = -\frac{qy}{2\pi\varepsilon_0 a^3} \quad \text{et} \quad \vec{E}_z = \frac{qz}{\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

03 - Dans le plan xOy, l'équation des lignes de champ est telle que : $\frac{dx}{\vec{E}_x} = \frac{dy}{\vec{E}_y}$

Donc $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ soit $\boxed{x = Ky}$

Les lignes de champ sont donc *au voisinage de O*, des droites passant par O. Ces lignes sont dirigées vers les potentiels décroissants, donc vers O.



04 - Dans le plan xOy, les lignes équipotentielles sont telles que $x^2 + y^2$ = constante. Ce sont donc des cercles centrés sur O.

Partie III

Au voisinage de M, dans le plan xOy

$$f_x = QE_x = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^3}2x = -\frac{Qqx}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$f_y = QE_y = -\frac{Qqy}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 a^3}x \quad \text{d'où} \quad x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 a^3 m}}$$

de même $y = A'\cos\omega t + B'\sin\omega t$

$t = 0$ $\quad x = x_0$ donc $x_0 = A$ $\quad x' = 0$ donc $B = u$ $\quad$ d'où $\boxed{x = x_0\cos\omega t}$

$y_0 = 0$ donc $A' = 0$

$y' = v_0$ donc $v_0 = B'\omega$ soit $B' = \frac{v_0}{\omega}$ d'où $\boxed{y = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$

$$\boxed{\frac{x^2}{{x_0}^2} + \frac{y^2}{\frac{{v_0}^2}{\omega^2}} = 1}$$

La trajectoire est une ellipse de demi-axes $\begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$ et de centre O.

2 - CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR UNE DISTRIBUTION SPHÉRIQUE ET DES DISTRIBUTIONS PLANES

Énoncé

Partie I

On considère une distribution continue de charges électriques centrées en un point O dont la densité volumique ρ à la distance r de O s'exprime par la relation

$$\rho(r) = C\,\frac{e^{-kr}}{r}$$

01 - Quelle est la charge d'une couche sphérique comprise entre les sphères de rayons r et $r+dr$?

02 - Quel est le champ $|\overrightarrow{dE}|$ créé par cette couche dans le vide :

a) en un point intérieur ?

b) en un point extérieur situé à la distance r' de O ?

03 - Quelle est la charge totale q de la distribution ?

04 - Quelle est la fraction q_r de la charge totale q qui se trouve à l'intérieur d'une sphère de rayon r ? En posant $R = \frac{1}{k}$, déterminer q_r en fonction de q dans les cas

$r = R$ et $r = 10R$.

05 - Déterminer le champ $|\overrightarrow{E(r')}|$ créé par l'ensemble de la distribution en un point situé à la distance r' de l'origine. On posera encore $R = \frac{1}{k}$. Caractériser le champ si $r' >> R$.

06 - Déterminer le potentiel $V(r')$ créé en r' par la distribution. On prendra $V = 0$ à une distance infinie de O. Caractériser le potentiel si $r' >> R$.

Partie II

On donne un plan (π) perpendiculaire en O à un axe $x'Ox$ possédant une charge de densité constante $\sigma = 1\mu C.m^{-2}$.

01 - Calculer le champ créé par ce plan.

02 - On prend le potentiel de (π) comme origine. Calculer le potentiel en un point d'abscisse $x = 1$ mm.

03 - On place un plan (P), uniformément chargé, ayant une densité opposée à celle de (π) parallèlement à (π) en un point d'abscisse $x = 1$ cm. Calculer le champ entre les deux plans et dans la région extérieure de l'espace.

04 - Déterminer le potentiel à gauche de (π), entre (π) et (P) et à droite de (P). Faire

une représentation graphique.

05 - Une charge mobile ponctuelle $q = 10^{-9}$ C se déplace sur une circonférence de centre C et de rayon $a = 2$ mm située dans un plan perpendiculaire aux deux autres. C est équidistant des deux plans et se trouve sur $x'Ox$. La charge est primitivement sur $x'Ox$ au point M le plus proche de (π). On la déplace jusqu'en un point N défini par l'angle $(CM, CN) = \alpha$. Quel est le travail accompli par les forces électrostatiques ? Donner son expression en fonction de α, q, σ, a. Calculer sa valeur pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(Centrale)

SOLUTION

Partie I

01 - $dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$ $\boxed{dQ = 4\pi C r e^{-kr} dr}$

02 - En un point intérieur $\boxed{dE = 0}$

En un point extérieur $dE = \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$ soit $\boxed{dE = \dfrac{C\, r\, e^{-kr}\, dr}{\varepsilon_0 r'^2}}$

03 - $$Q = \int_0^\infty dQ = 4\pi C \int_0^\infty r e^{-kr} dr.$$

$\int r e^{-kr} dr$ s'intègre sans difficultés par parties et on obtient $\boxed{Q = \dfrac{4\pi C}{k^2}}$

04 - À l'intérieur de la sphère de rayon r il suffit de changer les bornes dans le calcul précédent. On obtient :

$\dfrac{q(r)}{Q} = 1 - e^{-kr}(1 + kr)$ avec $k = \dfrac{1}{R}$ $\dfrac{q(r)}{Q} = 1 - e^{-r/R}\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)$

si $r = R$ $\dfrac{q(R)}{Q} = 1 - \dfrac{2}{e} = \underline{0{,}264}$

Si $r = 10R$ $\dfrac{q(10R)}{Q} = 1 - \dfrac{11}{e^{10}} = \underline{0{,}9995 \approx 1 - 5{,}10^{-4}}$

05 - Dans le calcul du champ seules comptent les charges situées à l'intérieur de la sphère de rayon r'

$$E = \frac{C}{\varepsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} r e^{-kr} dr.$$

On intègre encore par parties. On obtient $\boxed{E = \dfrac{CR^2}{\varepsilon_0 r'^2}\left[1 - e^{-\frac{r'}{R}}\left(1 + \dfrac{r'}{R}\right)\right]}$

Si $r' >> R$ $e^{-\frac{r'}{R}} \approx 0$ et $1 + \dfrac{r'}{R} \approx \dfrac{r'}{R}$ donc $e^{-\frac{r'}{R}}\left(1 + \dfrac{r'}{R}\right) \approx 0$

donc

$$E \approx \frac{CR^2}{\varepsilon_0 r'^2}$$

Or, $CR^2 = \frac{Q}{4\pi}$. Q étant la charge totale de la distribution. Donc

$$E \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

06 - On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ soit

$$V = -\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \text{constante}$$

Comme $\vec{E}$ est radial, $\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int E \cdot dr'$

D'où en intégrant encore par parties

$$\boxed{V = \frac{CR^2}{\varepsilon_0 r'}\left(1 - e^{-\frac{r'}{R}}\right)}$$

Si $r' >> R$ $V \approx \frac{CR^2}{\varepsilon_0 r'}$ soit $V \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$

Partie II

01 - $\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ $\boxed{E = 56\ 520\ Vm^{-1}}$

02 - $V = -Ex +$ constante. Comme $V = 0$ pour $x = 0$

$$\boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x} \qquad \boxed{V = -56\ 520x}$$

Si $x = 1$ mm $= 10^{-3}$ m $\underline{V = -56{,}52\ V}$

03 - À l'extérieur des deux plans $E = 0$ donc $V =$ constante. Entre les deux plans :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

A. N. $\boxed{\begin{aligned} E_{int} &= 113\ 040\ Vm^{-1} \\ E_{ext} &= 0 \end{aligned}}$

04 - À gauche de (π) $\underline{E = 0}$ $\underline{V = \text{constante} = V(\pi) = 0}$

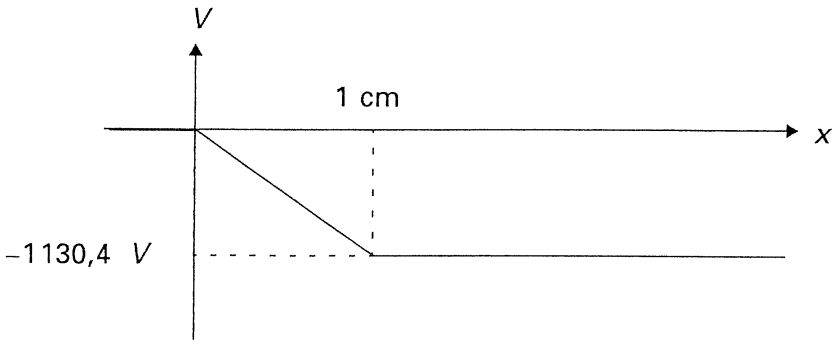
Entre (P) et (π) $V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x +$ constante ; $x = 0$ $V = 0$

donc

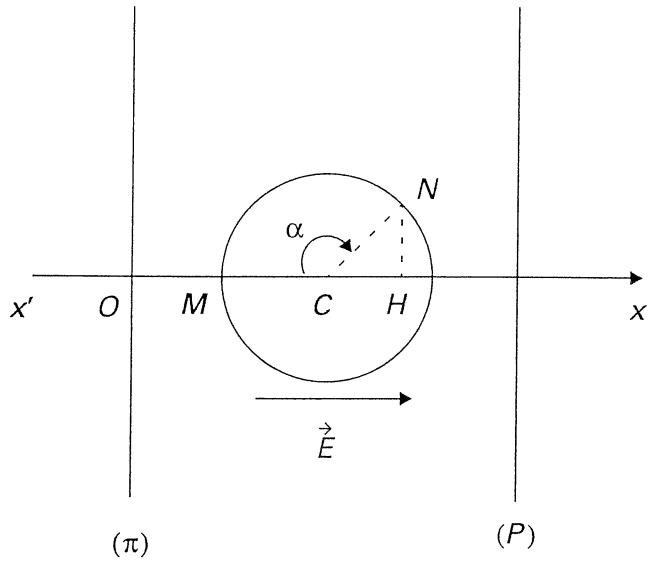
$$\underline{V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x} \qquad \underline{V = -113\,040\ x}$$

En (P) $x = 1$ cm $V = -1\,130{,}4\,V$

À droite de (P) $\underline{E = 0}$ $\underline{V = \text{constante} = V(P) = -1130{,}4\ V}$



05 -



$$\vec{f} = q\vec{E} \qquad dW = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} \qquad W = qE \cdot MH$$

Or, $MH = a - a\cos\alpha = a(1 - \cos\alpha)$ et $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ donc

$$\boxed{W = \frac{q\sigma a}{\varepsilon_0}(1 - \cos\alpha) = \frac{2q\sigma a}{\varepsilon_0}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

A.N. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ $\underline{W = 2{,}26.10^{-7}\ \text{J}}$.

3 - CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR DES FILS

Énoncé

Dans tout ce qui suit, les conducteurs considérés sont supposés placés dans l'air ($\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ dans le Système International).

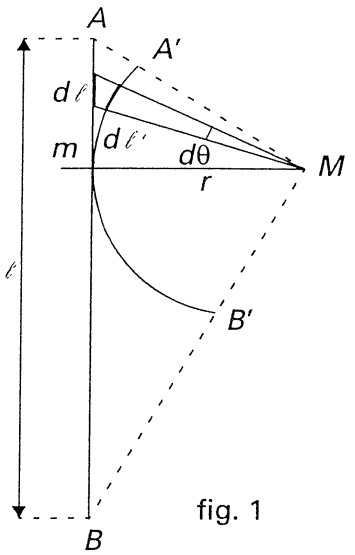


fig. 1

Partie I – *Potentiel et champ d'une distribution rectiligne de charges électriques.*

Étant donné un fil conducteur, rectiligne AB, de longueur ℓ, portant la charge électrique σ par unité de longueur, on étudie le champ et le potentiel en un point M situé à la distance $mM = r$ du fil.

01 - On considère dans le plan MAB un conducteur $A'mB'$ de forme circulaire, de centre M, tangent à la ligne AB en m et portant la même charge σ par unité de longueur.

Montrer que les éléments $d\ell$ de fil rectiligne et $d\ell'$ de conducteur circulaire représentés sur la figure 1 créent au point M le même champ élémentaire ($d\ell$ et $d\ell'$ sont vus du point M sous le même angle $d\theta$).

02 - Déduire du résultat précédent la direction du champ créé par la ligne AB au point M. Montrer que les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes de révolution de foyers A et B.

03 - Calculer la valeur du potentiel sur une des équipotentielles ; on désignera par $Q = \sigma\ell$ la charge totale de la ligne et par α le demi-grand axe de l'ellipsoïde considéré.

Remarque relative à l'étude des parties II et III. — En supposant que l'on supprime la droite électrisée AB définie précédemment et que l'on métallise l'ellipsoïde considéré en I, 3°, on admettra dans la suite que, si ce dernier porte la charge totale Q, il crée à son extérieur le même champ et le même potentiel que le fil rectiligne AB (principe de la métallisation d'une surface équipotentielle).

Partie II – *Potentiel et champ d'une couche cylindrique uniforme.*

On considère un cylindre conducteur de longueur $KK' = \ell$ et de rayon a, uniformément chargé sur toute sa longueur. (On appellera Q la charge totale.)

Dans tout ce qui suit, on considérera que le rayon a est petit devant la longueur ℓ et l'on ne tiendra pas compte des charges pouvant exister sur les sections droites terminales K et K'. On désignera par Or la demi-droite du plan de figure perpendiculaire à l'axe du cylindre en O, milieu de KK'.

On se propose d'étudier la variation du champ et du potentiel le long de l'axe Or.

01 - a) Le point M se trouvant à faible distance du cylindre (de telle sorte qu'on puisse considérer ℓ comme très grand devant r), trouver par application des théorèmes généraux de l'électrostatique les expressions du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre, ainsi que celles du potentiel à l'intérieur et à l'extérieur, en fonction de la distance $OM = r$ du point M à l'axe.

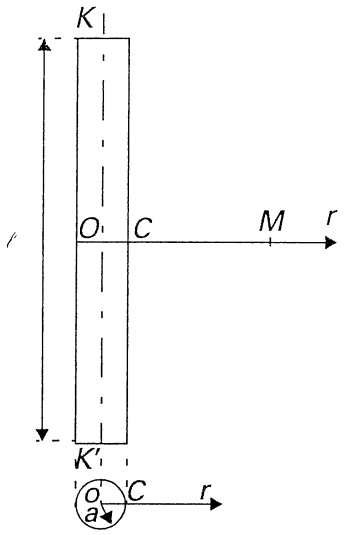


FIG. 2

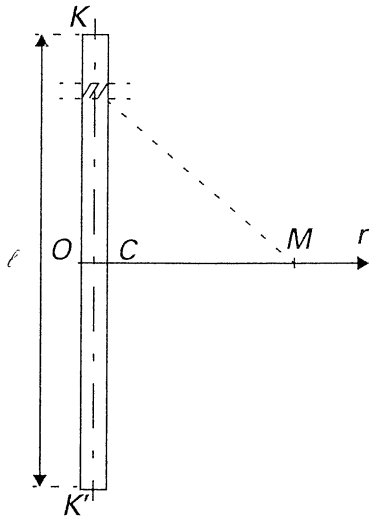


FIG. 3

b) Pour calculer les constantes figurant dans les expressions du potentiel on évaluera directement celui-ci au point C de la surface du cylindre. Dans ce but, on assimilera le cylindre à l'ellipsoïde conducteur inscrit et son intérieur et l'on utilisera les résultats de la partie I. On fera toute approximation estimée légitime en raison de la forme allongée du cylindre.

02 - On envisage à présent un point M de l'axe Or, situé à une distance $OM = r$ de l'axe suffisamment grande pour que tous les éléments chargés du petit tronçon de cylindre conducteur hachuré sur la figure 3 et compris entre deux sections droites infiniment voisines puissent être considérés comme étant à la même distance de M.

Évaluer directement le potentiel $V(r)$ créé au point M par l'ensemble des charges du cylindre.

03 - a) Peut-on retrouver simplement le résultat II, 2° à partir de ceux obtenus en I ?

Lorsque r est très grand devant la longueur ℓ du cylindre, quelle est l'expression de la partie principale de $V(r)$?

b) En supposant maintenant que le point M est près du cylindre (r petit devant ℓ) , montrer que l'expression du potentiel calculée à l'aide des résultats de I, 3° coïncide avec la détermination trouvée en II, 1°.

04 - *Application numérique* : On prendra les valeurs suivantes :

$$\ell = 1 \text{ mètre} ; \; a = 0{,}05 \text{ mètre} ; \; Q = 0{,}025 \text{ microcoulomb.}$$

On tracera la courbe représentant les variations de la fonction $V(r)$ en utilisant la formule du II, 1° a-b) puis la courbe obtenue en utilisant la formule trouvée en II, 2°. On calculera, en particulier, les valeurs correspondant aux distances $r = a$, $\frac{\ell}{2}$, ℓ et 2ℓ.

Quelle conclusion peut-on en tirer sur le domaine de validité de l'expression du potentiel trouvée en II, 1° b) ?

Partie III - *Potentiel de deux lignes chargées parallèles. Capacités et coefficients d'influence.* On considère maintenant deux cylindres très allongés identiques, de longueur ℓ et de rayon a, placés parallèlement à une distance d (fig. 4).

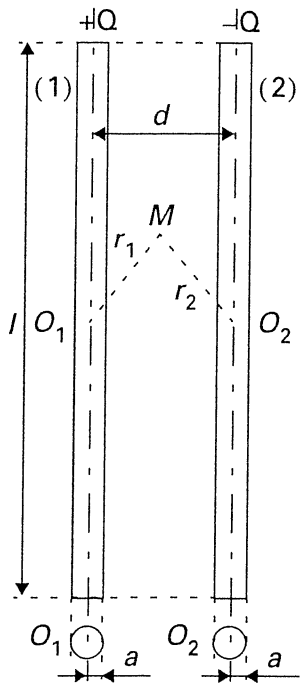


FIG. 4

Ces cylindres constituent une ligne bifilaire ; on supposera dans tout ce qui suit que a est petit devant d et que d est lui-même petit devant ℓ.

01 - a) Le cylindre (1) portant la charge électrique $+Q$ et le cylindre (2) portant la charge $-Q$, chacune de ces deux charges étant supposée uniformément répartie, déterminer à l'aide des résultats précédents le potentiel au point M (situé respectivement aux distances $r_1 = O_1M$ et $r_2 = O_2M$ des axes des deux cylindres ; on se bornera à envisager le cas où ces distances sont faibles devant la longueur ℓ) Quelles sont, dans ces conditions, les surfaces équipotentielles ? Calculer les potentiels V_1 et V_2 des deux cylindres, ainsi que la quantité (capacité linéique) :

$$\gamma = \frac{\left(\frac{Q}{\ell}\right)}{V_1 - V_2}.$$

b) *Application numérique.* Évaluer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ ainsi que γ, avec les données suivantes :

ℓ = 10 mètres ; d = 0,3 mètre ; a = 0,005 mètre ; Q = 0,05 microcoulomb.

02 - a) Les deux cylindres étant déchargés, on les porte maintenant à des potentiels V_1 et V_2 quelconques. Calculer les charges totales, Q_1 et Q_2, que prennent les deux cylindres et déterminer les expressions des coefficients C_{ij} définis par les relations

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2, \qquad Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2.$$

b) *Application numérique.* Les dimensions des cylindres étant celles données à la question III, 1° b) calculer les coefficients linéiques :

$$\frac{C_{11}}{\ell}, \frac{C_{12}}{\ell} \text{ et } \frac{C_{22}}{\ell}.$$

03 - Lorsque la longueur ℓ augmente indéfiniment, déterminer la limite des coefficients linéiques $\frac{C_{11}}{\ell}$, $\frac{C_{12}}{\ell}$ et $\frac{C_{22}}{\ell}$. Comparer ces valeurs à la capacité γ précédente.

(Ponts)

SOLUTION

Partie I

01 - $\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma d\ell}{MP^3}\overrightarrow{PM}$, P étant le centre de $d\ell$

Or, $$d\ell = \frac{rd\theta}{\cos^2\theta} = \frac{rd\theta}{\left(\frac{r}{MP}\right)^2} = \frac{MP^2}{r}\,d\theta$$

donc $$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma d\theta}{r}\cdot\frac{\overrightarrow{PM}}{MP}$$

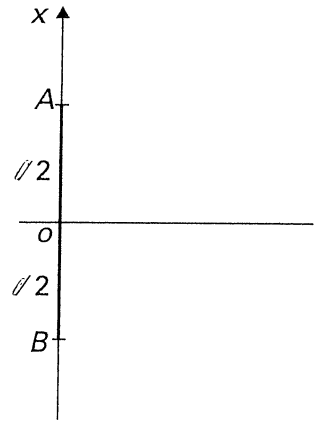
unitaire $\vec{u}$

ou $$\overrightarrow{dE} = \frac{\sigma\cdot rd\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{u} = \frac{\sigma d\ell'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{u}$$

02 - Par suite le champ $\overrightarrow{dE}$ créé par $d\ell$ est le même que celui créé par l'élément d'arc de cercle $d\ell'$. Le champ $\vec{E}$ résultant sera donc le même que celui créé par l'arc de cercle $A'mB'$ portant σ. *Ce champ sera donc porté par la bissectrice de l'angle $A'MB'$.*

La trace sur le plan de figure de la surface équipotentielle en M sera orthogonale à la ligne de champ en M. Elle sera donc tangente à la bissectrice extérieure de l'angle $A'MB'$. On retrouve là une propriété caractéristique des ellipses de foyers A et B. Le système étant de révolution autour de la droite AB, *les surfaces équipotentielles seront des ellipsoïdes de foyers A et B.*

03 -



Soit I le sommet de l'ellipsoïde sur Ox :

$$OI = \alpha$$

Le potentiel créé en I par le segment se calcule aisément

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dx}{\alpha - x}$$

d'où

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}}\frac{dx}{\alpha - x} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\alpha + \frac{\ell}{2}}{\alpha - \frac{\ell}{2}}$$

Or, $Q = \sigma\ell$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\ell}\ln\frac{2\alpha + \ell}{2\alpha - \ell}$$

Partie II

01 - a) On applique le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur ℓ et de rayon r. Il vient immédiatement

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ r<a & E=0 \\ \bullet\ r>a & E=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} \end{array}}$$

On en déduit le potentiel par $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}$

$$\bullet\ r<a \qquad V = A \quad \text{constante}$$

$$\bullet\ r>a \qquad V = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + B, \quad B \text{ constante}$$

A et B ne sont pas indépendantes puisque V doit être continu en $r = a$:

$$A = B - \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln a\,.$$

D'où

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ r<a & V=A \\ \bullet\ r>a & V=A-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{a} \end{array}}$$

b) C doit être l'extrémité du petit axe. Donc la distance focale $2c$ doit être telle que

$$c = \sqrt{\alpha^2 - a^2} = \sqrt{\frac{\ell^2}{4} - a^2}$$

$$2c = \sqrt{\ell^2 - 4a^2}$$

En C on doit avoir d'après I.3

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{2\alpha + \sqrt{\ell - 4a^2}}{2\alpha - \sqrt{\ell^2 - 4a^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 4a^2}}{\ell - \sqrt{\ell^2 - 4a^2}}$$

Or, $a << \ell$. Donc

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{1+\left(1-\dfrac{2a^2}{\ell^2}\right)}{1-\left(1-\dfrac{2a^2}{\ell^2}\right)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\left[\frac{\ell^2}{2a^2}\left(2-2\frac{a^2}{\ell^2}\right)\right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\left(\frac{\ell^2}{a^2} - 1\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{\ell^2}{a^2}.$$

Par suite

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{\ell^2}{a^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{\ell}{a}$$

et donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} r<a & V=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{\ell}{a} \\ r>a & V=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{\ell}{r} \end{array}}$$

02 - $$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\ell}\frac{dx}{\sqrt{x^2+r^2}}.$$

On en déduit V par intégration entre $-\frac{\ell}{2}$ et $+\frac{\ell}{2}$:

$$\boxed{V=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\ln\left[\frac{1}{2r}\left(1+\sqrt{1+\frac{\ell^2}{4r^2}}\right)\right]=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\operatorname{Arg\,sh}\frac{\ell}{2r}}$$

03 - a) En considérant un ellipsoïde de distance focale ℓ passant par M

$$2\alpha=\sqrt{\ell^2+4r^2}$$

donc

$$\ln\frac{2\alpha+\ell}{2\alpha-\ell}=\ln\frac{\sqrt{\ell^2+4r^2}+\ell}{\sqrt{\ell^2+4r^2}-\ell}=\ln\frac{\left(\sqrt{\ell^2+4r^2}+\ell\right)^2}{4r^2}$$

$$=2\ln\frac{\sqrt{\ell^2+4r^2}+\ell}{2r}.$$

Donc

$$V=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\ln\frac{\sqrt{\ell^2+4r^2}+\ell}{2r}$$

Si $r>>l$ $\operatorname{Arg\,sh}\frac{\ell}{2r}\approx\frac{\ell}{2r}$ donc $V\approx\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Tout se passe comme si toutes les charges étaient rassemblées en O.

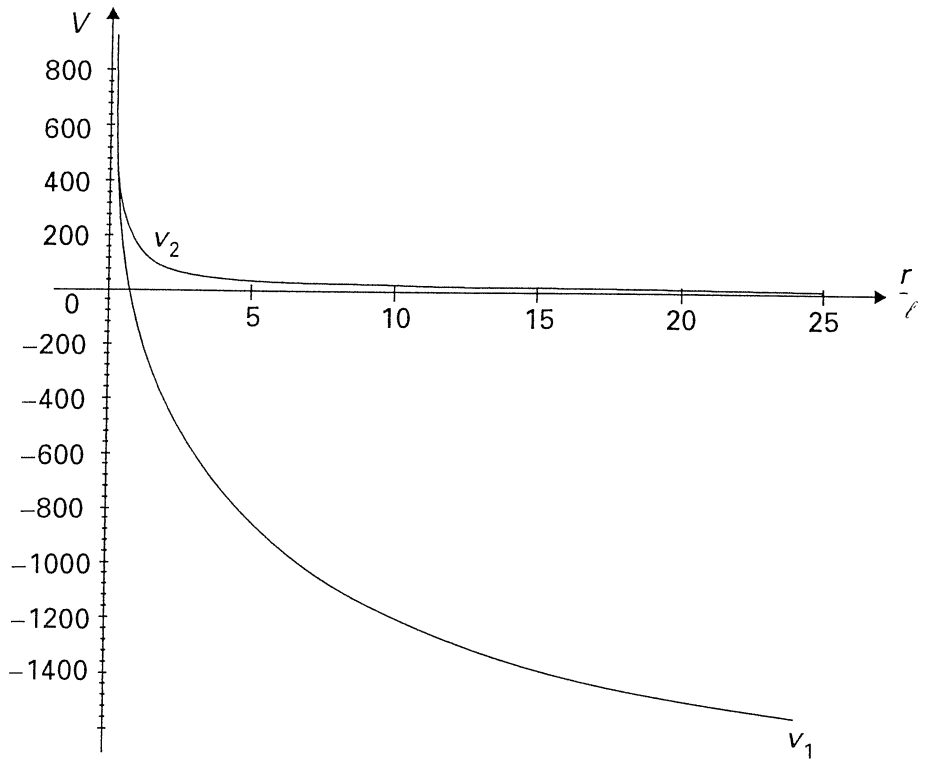
b) Si $r<<\ell$ $\ln\left(\frac{\sqrt{\ell^2+4r^2}+\ell}{2r}\approx\ln\frac{\ell}{r}\right)$ donc $V\approx\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\ln\frac{\ell}{r}$

04 -

$$V_1 = 450 \ln \frac{\ell}{r}$$

$$V_2 = 450 \operatorname{Arg\,sh} \frac{\ell}{2r}$$

r	a	$\frac{\ell}{4}$	$\frac{\ell}{2}$	ℓ	2ℓ
$\frac{\ell}{r}$	20	4	2	1	$\frac{1}{2}$
V_1	1 348	624	311	0	−311
V_2	1 349	650	396	216	111,6



La formule V_1 n'est valable avec une approximation convenable que jusqu'à $r = \frac{\ell}{4}$ (incertitude relative égale alors à 4 %).

Partie III

01 - a) r_1 et r_2 étant les distances de M aux axes des cylindres

$$\boxed{V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Les surfaces équipotentielles sont telles que $\frac{r_2}{r_1}$ = constante.

Ce sont des cylindres dont les axes sont parallèles à ceux des conducteurs.

Sur le cylindre portant Q : $r_1 = a$, $r_2 \approx d$ donc

$$\boxed{V_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \frac{d}{a}}$$

Sur l'autre cylindre $r_1 \approx d$, $r_2 = a$ donc

$$\boxed{V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \frac{a}{d} = -V_1}$$

d'où

$$\boxed{\gamma = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}}$$

b) $\boxed{\gamma = 6{,}78.10^{-12} F \qquad V_1 - V_2 = 737\,V}$

02 - a)

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \dfrac{\ell}{a} + \dfrac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \dfrac{\ell}{d} \\ V_2 = \dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \dfrac{\ell}{d} + \dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \dfrac{\ell}{a} \end{cases}$$

On obtient, tous calculs faits :

$$\boxed{\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell \ln \frac{\ell}{a}}{\left(\ln \frac{\ell}{a}\right)^2 - \left(\ln \frac{\ell}{d}\right)^2} \\ C_{12} = C_{21} &= -\frac{2\pi\varepsilon_0 \ell \ln \frac{\ell}{d}}{\left(\ln \frac{\ell}{a}\right)^2 - \left(\ln \frac{\ell}{d}\right)^2} \end{aligned}}$$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{C_{11}}{\ell} &= \frac{C_{22}}{\ell} = 9{,}3.10^{-12}\ \text{F.m}^{-1} \\ \frac{C_{12}}{\ell} &= \frac{C_{21}}{\ell} = -4{,}3.10^{-12}\ \text{F.m}^{-1} \end{aligned}}$$

03 -

$$\frac{11}{\to \infty} = \frac{2\pi\varepsilon_0 [\ln \ell - \ln a]}{(\ln \ell)^2 + (\ln a)^2 - 2(\ln \ell)(\ln a) - (\ln \ell)^2 - (\ln d)^2 + 2(\ln \ell)(\ln d)}$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0 [\ln \ell - \ln a]}{(\ln a)^2 - (\ln d)^2 + 2(\ln \ell)(\ln d - \ln a)}$$

Quand $\ell \to \infty$ $\quad \dfrac{C_{11}}{\ell} \to \dfrac{2\pi\varepsilon_0 \ln \ell}{2(\ln \ell)\left(\ln \dfrac{d}{a}\right)} = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{d}{a}}$

Donc $\quad \dfrac{C_{11}}{\ell} \underset{\ell \to \infty}{\to} \gamma$

De même $\quad \dfrac{C_{12}}{\ell} \underset{\ell \to \infty}{\to} -\gamma$

Ce résultat est logique puisque lorsque $\ell \to \infty$ l'influence tend vers l'influence totale étudiée dans la partie III.1.

4 - ÉTUDE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

Énoncé

Nous étudierons les propriétés d'une distribution volumique de charge à symétrie sphérique centrée à l'origine d'un système d'axes trirectangle direct *Oxyz*. On appellera *x*, *y* et *z* les coordonnées d'un point *M* et on posera $r = OM$, distance du point *O* au point *M*. On supposera cette distribution placée dans le vide et isolée de tout conducteur et de toute autre charge électrique.

Cette répartition de charges sera caractérisée par sa densité volumique $\rho(r)$ et par sa charge totale *Q*. Le champ électrique $\vec{E}$ est alors un vecteur radial qui sera éventuellement caractérisé par sa valeur algébrique *E* le long du rayon.

Nous étudierons dans les quatre premières parties les propriétés électrostatiques de différentes distributions de charges électriques.

On utilisera éventuellement les valeurs numériques suivantes :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3\ 10^8\ \text{ms}^{-1}$;

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ S.I ;

Charge de l'électron : $-e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C ;

Masse de l'électron m_0, équivalente à une énergie de 510 keV.

Partie I

Électrostatique, relations générales.

01 - En supposant connu $\rho(r)$, quelle est l'expression de la charge ΔQ comprise entre les distances *r* et $r + \Delta r$, Δr étant petit ?

02 - En déduire l'expression de la charge $Q(r)$ comprise à l'intérieur d'une sphère de rayon *r*.

a) Si $\rho(r)$ est de la forme r^α, α donné, pour *r* tendant vers zéro, à quelle condition doit satisfaire α pour que $Q(r)$ soit défini ?

b) Si $\rho(r)$ est de la forme r^β, β donné, pour les grandes valeurs de *r*, à quelle condition doit satisfaire β pour que la charge $Q(r)$ soit définie pour *r* infini ? On supposera désormais que $Q(r)$ est défini aussi bien pour $r = 0$ que pour *r* infini et on appellera *Q* la charge correspondante comme il a été convenu dans l'introduction.

03 - Quelle est l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en fonction de $Q(r)$? Sous quelle forme s'écrit le potentiel $V(r)$? Écrire sous forme d'intégrales en fonction de $V(r)$ et de $\rho(r)$ l'énergie potentielle électrostatique du système. On prendra toujours le potentiel nul à l'infini.

Si $\rho(r)$ est de la forme r^{α}, α donné, pour r tendant vers zéro, montrer qu'il peut exister des valeurs de α telles que la charge $Q(r)$ soit définie, l'énergie potentielle ne l'étant pas.

Partie II

Étude des distributions homogènes.

Nous supposerons que $\rho(r)$ est constant et égal à ρ_0 dans l'épaisseur d'une sphère creuse de rayon interne R_i et de rayon extérieur R et nul ailleurs. La charge totale Q est donnée.

04 - Calculer ρ_0, $\vec{E}(r)$ et $V(r)$ en fonction des données précédentes. Quelle est la valeur E_0 du champ E pour $r = R$?

05 - Quelles formes prennent les expressions précédentes dans le cas d'une sphère pleine $(R_i = 0)$?

06 - Supposons maintenant R_i et R voisins et posons $R = R_i + A$, A étant assez petit pour que l'on puisse considérer la sphère creuse comme une couche mince de densité superficielle σ ?

a) Quelle est la relation entre la densité superficielle σ et ρ_0 ?

Quelle relation peut-on établir entre le champ E_0 au voisinage et à l'extérieur de la surface de la sphère et la densité superficielle σ ?

b) Quelle forme prend le potentiel $V(r)$?

Calculer, à partir du potentiel, l'énergie électrostatique de cette couche mince.

c) Calculer, à partir du champ électrique, l'énergie électrostatique de cette couche mince (l'énergie d'un champ E est $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ par unité de volume). Comparer ces deux expressions de l'énergie.

d) *Application numérique* : en assimilant l'électron à une couche mince chargée, et en supposant que toute sa masse au repos est d'origine électrostatique, au sens de l'équivalence d'Einstein, calculer son rayon. On utilisera les données de l'introduction.

07 - On suppose Q et R donnés.

a) Montrer que l'on obtient l'énergie minimum lorsque la répartition de charge se réduit à une couche superficielle.

b) Dans quel cas, courant dans la pratique, a-t-on effectivement une distribution superficielle de charges électriques ?

Partie III

Étude du champ électrique superficiel.

Nous nous proposons maintenant d'étudier le champ E à l'intérieur de la couche mince envisagée à la sixième question et de définir le champ superficiel E_s.

08 - En se plaçant dans les conditions de la sixième question et en posant $r = R_i + a$ montrer que, pour A petit, $E(a)$ est proportionnel à a, $E(a)$ étant le champ électrique à la distance $r = R_i + a$. Quelle est alors la valeur moyenne E_s de E sur l'épaisseur A de la couche ?

09 - On se propose de généraliser le résultat précédent lorsque la distribution $\rho(r)$ est variable entre R_i et R et nulle à l'extérieur de cet intervalle, la charge totale restant égale à Q.

a) En supposant connue la fonction $E(a)$, dont on rappellera la valeur pour $a = 0$ (c'est-à-dire $r = R_i$) et la valeur E_0 pour $a = A$ (c'est-à-dire $r = R$), calculer la charge $Q(a)$ comprise à l'intérieur de la sphère de rayon $r = R_i + a$. Calculer la densité volumique $\rho(a)$.

b) Calculer la force ΔF qui s'exerce sur un élément de volume de surface ΔS et d'épaisseur A.

c) Montrer que pour $E(a)$ borné et dans la limite où A tend vers zéro la force ΔF ne dépend pas de $E(a)$ mais uniquement de $E(A) = E_0$.

d) On définira le champ superficiel E_s comme étant le champ qui exerce la même force ΔF sur la charge ΔQ contenue dans le volume envisagé précédemment. Quelle est la valeur de E_s ?

Vérifier que la définition précédente correspond bien à celle qui a été adoptée dans la huitième question.

10 - On suppose maintenant la charge Q uniformément répartie sur une baudruche élastique et mince de rayon R. Soit p la surpression à l'extérieur de la baudruche, son coefficient de tension superficielle T étant nul. Écrire la condition d'équilibre en faisant le bilan d'énergie lors d'une variation ΔR du rayon R. Retrouver la valeur de la force électrique ΔF sur un élément de surface ΔS et la valeur E_s du champ superficiel.

Application numérique : pour une baudruche de 1 m de rayon portée à un potentiel de 1 000 volts, calculer la surpression p nécessaire pour la maintenir en équilibre.

11 - Quelle est la condition d'équilibre, en tenant compte de la tension superficielle T de la baudruche, en présence de la surpression p ?

Application numérique : quelle doit être la valeur de la tension T pour qu'il y ait équilibre, la surpression étant la moitié de celle calculée lors de l'application numérique précédente (le potentiel et le rayon restent inchangés) ?

Partie IV

Étude d'une distribution particulière.

Soit une distribution $\rho(r)$, nulle à l'extérieur de la sphère de rayon R et telle que $E(r)$ soit constant entre 0 et R, la charge totale étant Q.

12 - Calculer la charge $Q(r)$ et la densité $\rho(r)$.

13 - Calculer le potentiel $V(r)$. Comparer $V(0)$ et $V(R)$.

Partie V

Étude des propriétés magnétiques de la charge en mouvement rectiligne uniforme.

La charge Q est animée maintenant d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v portée par Ox. Nous nous placerons dans le cas où la répartition de la charge Q est superficielle à la surface d'une sphère de rayon R et nous étudierons les effets magnétiques. À l'intérieur de la sphère, nous admettrons que l'induction magnétique $\vec{B}$ est nulle. À l'extérieur, nous admettrons que l'on peut remplacer l'ensemble de la charge Q, animée de la vitesse $\vec{v}$, par un élément de courant équivalent $I\,\vec{d\ell}$, placé en son centre. Nous étudierons $\vec{B}$, à l'instant $t = 0$, instant où le centre de la sphère passe par l'origine O. Un point quelconque M sera caractérisé par ses coordonnées x, y et z, pour la distance $r = OM$ et, éventuellement, par l'angle $\theta = (Ox, OM)$.

14 - Écrire, à partir de la loi de Biot et Savart, sous forme vectorielle la valeur de $\vec{B}$ en un point M. Quelle est la valeur du module de $\vec{B}$?

15 - Calculer l'énergie associée à cette induction magnétique. (L'énergie d'un champ B est $\frac{B^2}{2\mu_0}$ par unité de volume). On pourra calculer la valeur moyenne de x^2 et de $\cos^2\theta$ sur la sphère de rayon r et de centre O, puis utiliser ces expressions dans le calcul de l'énergie.

16 - Montrer que cette expression a la même forme qu'une énergie cinétique et en déduire la masse électromagnétique de l'électron en fonction de sa charge et de son rayon. Comparer cette expression à celle qui a été calculée à la sixième question.

(ENS)

SOLUTIONS

Partie I

01 - $\Delta Q = 4\pi r^2 \rho(r)\,\Delta r$

02 - a) Au voisinage de O $Q \sim \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot r^\alpha = \frac{4}{3}\pi r^{\alpha+3}$ doit tendre vers une valeur finie si $r \to 0$ donc $\alpha + 3 \geq 0$ $\boxed{\alpha \geq -3}$

b) $Q = \int_r^\infty 4\pi r^{2+\beta} dr$ converge si $3 + \beta < 0$ $\boxed{\beta < -3}$

03 - Théorème de Gauss $\vec{E}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$ $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \qquad V = -\int \frac{Q(r)\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \text{constante}.$$

Comme $Q \to 0$ quand $r \to \infty$ on peut prendre le potentiel coulombien

$$\boxed{V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{Q(r)\,dr}{r^2}}$$

l'énergie potentielle est

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(r)\,V(r)\,d\vartheta$$

Comme $d\vartheta = 4\pi r^2 dr$ en raison de la symétrie sphérique

$$\boxed{\mathscr{E}_p = 2\pi\int_0^\infty r^2 \rho(r)\,V(r)\,dr}$$

$$\rho(r) = r^\alpha \qquad \mathscr{E}_p = 2\pi\int_0^\infty r^{2+\alpha}\,V(r)\,dr$$

$$Q(r) = \int_0^r 4\pi r^{2+\alpha} dr = 4\pi\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}$$

d'où

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\alpha^r 4\pi\frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0(\alpha+3)}\int_\infty^r x^{\alpha+1}dx$$

$$V(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0(\alpha+3)(\alpha+2)}r^{\alpha+2}$$

Enfin

$$\mathscr{E}_\rho = 2\pi \int_0^\infty x^2 x^\alpha \frac{-x^{\alpha+2}}{\varepsilon_0 (\alpha+3)(\alpha+2)} dx = \frac{-2\pi}{\varepsilon_0 (\alpha+3)(\alpha+2)} \int_0^\infty x^{2\alpha+4} dx$$

$$= -\frac{2\pi}{\varepsilon_0 (\alpha+3)(\alpha+2)(2\alpha+5)} x^{2\alpha+5}$$

Quand $x \to 0$ $\mathscr{E}_\rho$ est définie si $2\alpha+5>0$ soit $\alpha > -\frac{5}{2}$ dans les mêmes conditions Q est définie si $\alpha \geq -3$.

Sur l'intervalle $\left[-3, -\frac{5}{2}\right[$ Q est définie, $\mathscr{E}_p$ ne l'est pas quand $r \to 0$.

Partie II

04 - $Q = \frac{4}{3}\pi (R^3 - R_i^3)\rho_0$ $\boxed{\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi (R^3 - R_i^3)}}$

- $\underline{r>R}$ $E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$ d'où $\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$
- $r<Ri$ $\boxed{E(r) = 0}$ d'où $V = cte$
- $R_i < r < R$ $E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi (r^3 - R_i^3)\rho_0$ $E(r) = \frac{\rho_0 (r^3 - R_i^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$

$$E(r) = \frac{3Q}{4\pi (r^3 - R_i^3)} \cdot \frac{r^3 - R_i^3}{3\varepsilon_0 r^2} \qquad \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)} \cdot \left(r - \frac{R_i^3}{r^2}\right)}$$

$$-dV = \int E(r)\, dr \qquad -V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_i^3}{r}\right) + K$$

On détermine K par continuité en $r = R$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R_i^3}{R}\right) - K$$

$$K = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^3 - R_i^3}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R_i^3}{R}\right) + \frac{1}{R}\right]$$

d'où

$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_i^3}{r}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^3 - R_i^3}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R_i^3}{R}\right) + \frac{1}{R}\right]$$

$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_i^3}{r}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[1 + \frac{R^3 + 2R_i^3}{2(R^3 - R_i^3)}\right]$$

$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_i^3}{r}\right) + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R (R^3 - R_i^3)} 3R^{3^2}$$

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{3R^2}{2} - \frac{R_i^3}{r} - \frac{r^2}{2}\right)} \quad (R_i < r < R)$$

On en déduit enfin le potentiel constant pour $r < R_i$ par continuité :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{3R^2}{2} - R_i^2 - \frac{R_i^2}{2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}\left(\frac{3R^2 - 3R_i^2}{2}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{3Q(R^2 - R_i^2)}{8\pi\varepsilon_0 (R^3 - R_i^3)}} \quad (r < R_i)$$

Pour $r = R$ $\qquad E_0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (on vérifie bien la continuité)

05 - Si $R_i = 0$ on obtient

$\underline{r < R}$ $\quad E(r) = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ $\qquad V = \dfrac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$

$\underline{r > R}$ $\quad E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\qquad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

06 - a)

$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho_0 [R^3 - R_i^3] = \frac{4\pi\rho_0}{3}[(R_i + A)^3 - R_i^3] = \frac{4\pi\rho_0}{3}[3AR_i^2 + 3R_iA^2 + A^3]$$

$\approx 4\pi\rho_0 AR_i^2$ en ne gardant que les termes en A.

$Q = 4\pi R_i^2\sigma$ pour une courbe superficielle. D'où

$$\boxed{\sigma = A\rho_0}$$

c'est le théorème de Coulomb $\boxed{\vec{E}_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$ $\vec{n}$ unitaire de la normale orientée vers l'extérieur.

b) $\qquad \sigma = \dfrac{Q}{4\pi R_i^2}$ $\qquad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ pour $r > R_i + A$

donc $\qquad \boxed{V = \dfrac{\sigma R_i^2}{\varepsilon_0 r}}$

Pour $\quad R_i < r < R_i + A \quad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 [(R_i + A)^3 - R_i^3]}\left[\dfrac{3}{2}(R_i + A)^2 - \dfrac{R_i^3}{r} - \dfrac{r^2}{2}\right]$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3\left[1+\frac{3A}{R_i}-1\right]}\left[\frac{3}{2}R_i^2\left(1+2\frac{A}{R_i}\right)-\frac{R_i^3}{r}-\frac{r^2}{2}\right]$$

$$V \approx \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 R_i^2 A}\left[\frac{3}{2}R_i^2-\frac{R_i^3}{r}-\frac{r^2}{2}\right].$$

Comme $Q = 4\pi R_i^2\sigma$ $\boxed{V = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0 A}\left[\frac{3}{2}R_i^2-\frac{R_i^3}{r}-\frac{r^2}{2}\right]}$ $(R_i < r < R)$

On en déduit l'énergie de la couche

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}\iiint \rho_0 V r\,d\mathscr{V} = \frac{\rho_0}{2}\int_{R_i}^{R_i+A}\frac{\sigma}{3\varepsilon_0 A}\left[\frac{3}{2}R_i^2-\frac{R_i^3}{r}-\frac{r^2}{2}\right]4\pi r^2\,dr$$

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}\rho_0\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left[(R_i+A)^3-R_i^3\right]}\int_{R_i}^{R_i+A}\left[\frac{3}{2}(R_i+A)^2-\frac{R_i^3}{r}-\frac{r^2}{2}\right]4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0\,\frac{Q4\pi}{4\pi\varepsilon_0\left[(R_i+A)^3-R_i^3\right]}\left[\frac{3}{2}(R_i+A)^2\frac{r^3}{3}-R_i^3\frac{r^2}{2}-\frac{r^5}{10}\right]_{R_i}^{R_i+A}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\rho_0 Q}{\varepsilon_0\left[(R_i+A)^3-R_i^3\right]}\left[\frac{(R_i+A)^5}{2}-\frac{(R_i+A)^2R_i^3}{2}-\frac{R_i^3(R_i+A)^2}{2}+\frac{R_i^5}{2}-\frac{(R_i+A)^5-R_i^5}{10}\right]$$

$$= \frac{\rho_0 Q}{2\varepsilon_0\left[(R_i+A)^3-R_i^3\right]}\left[\frac{5AR_i^4+10A^2R_i^3-2AR_i^4-A^2R_i^3}{2}-AR_i^4-\frac{A^2R_i^3}{2}-\frac{5AR_i^4+10A^2R_i^3}{10}\right]$$

$$= \frac{\rho_0 Q}{2\varepsilon_0\left[(R_i+A)^3-R_i^3\right]}\left[3A^2R_i^3\right] = \frac{3\rho_0 QA^2R_i^3}{2\varepsilon_0(3AR_i^2+3A^2R_i+A^3)}$$

$$= \frac{3\rho_0 QA^2R_i^3}{2\varepsilon_0 R_i^3\left(3\frac{A}{R_i}+3\frac{A^2}{R_i^2}+\frac{A^3}{R_i^3}\right)} = \frac{\cancel{3}\rho_0 QA^{\cancel{2}}}{2\varepsilon_0\cdot\cancel{3}\frac{A}{R_i}\left(1+\frac{A}{R_i}+\frac{A^3}{3R_i^2}\right)}$$

Or, $\rho_0 A = \sigma$. Donc

$$\boxed{\mathscr{E}_p \approx \frac{Q\sigma R_i}{2\varepsilon_0}}$$

c) L'énergie du champ est localisée dans l'espace

$$\mathscr{E}'_p = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{R_i}^{R}E^2\cdot 4\pi r^2\,dr+\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{R}^{\infty}E^2\cdot 4\pi r^2\,dr \quad \text{(pour } r<R_i \quad E=0\text{)}.$$

On remplace E par les expressions précédentes et on retrouve tous calculs faits (c'est long !) l'expression $\mathscr{E}_p$ ci-dessus.

d) L'énergie propre de l'électron est m_0c^2. On écrit $\mathscr{E}_p = m_0c^2$ soit

$$m_0c^2 = \frac{e}{2\varepsilon_0}R_i\frac{e}{4\pi R_i^2}$$

donc $$\boxed{R_i = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\omega_0 c^2}}$$

AN $$\boxed{R_i = 1{,}42.10^{-15}\ \text{m}}$$

07 - a) On exprime σ : $\sigma = A\rho_0$ d'où

$$\mathscr{E}_p = \frac{QA\rho_0 R_i}{2\varepsilon_0} = \frac{4\pi R_i^{\,2}(A\rho_0)^2 R_i}{2\varepsilon_0} = \frac{2\pi A^2\rho_0^{\,2}R_i^3}{\varepsilon_0}$$

$\frac{\partial \mathscr{E}_p}{\partial A} = \frac{4\pi\rho_0^2 R_i^2}{\varepsilon_0}A$ s'annule pour $A = 0$ → *l'énergie est donc minimale pour une répartition surfacique* (si $A \neq 0$ $\mathscr{E}_p > 0$, si $A = 0$ $\varepsilon_p = 0$)

b) Pour un conducteur en équilibre.

Partie III

08 - On écrit encore le théorème de Gauss

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

avec $$Q(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0(r^3 - R_i^3) = \frac{4\pi\rho_0}{3}[(R_i + a)^3 - R_i^3] = \frac{4\pi\rho_0 R_i^3}{3}\left[3\frac{a}{R_i} + 3\frac{a^2}{R_i^2} + \frac{a^3}{R_i^3}\right]$$

$$E = \frac{4\pi\rho_0 R_i^3}{3\varepsilon_0}\left[3\frac{a}{R_i} + 3\frac{a^2}{R_i^2} + \frac{a^3}{R_i^3}\right]\frac{1}{4\pi R_i^2\left(1 + 2\frac{a}{R_i} + \frac{a^2}{R_i^2}\right)}$$

En se limitant aux termes du premier ordre en $\frac{a}{R_i}$ il vient :

$$E = \frac{\cancel{4\pi}\rho_0\cancel{R_i^3}}{\cancel{3}\varepsilon_0}\left(\cancel{3}\frac{a}{\cancel{R_i}}\right)\frac{1}{\cancel{4\pi}\cancel{R_i^2}} \qquad \boxed{E = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}}$$

La valeur moyenne de E est donc

$$E_s = \frac{1}{A}\int_0^A E\,da = \frac{1}{A}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{2}\right)_0^A = \frac{\rho_0 A}{2\varepsilon_0}.$$

Comme on avait posé $\sigma = A\rho_0$:

$$\boxed{E_s = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

09 - a) Pour $a = 0 \quad E = 0$, pour $a = A \quad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0$

On écrit encore le théorème de Gauss :

$$E(a) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(a)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{Q(a) = 4\pi (R_i + a)^2 \varepsilon_0 E(0)}$$

à la distance $a + da$:

$$Q(a + da) = 4\pi (R_i + a + da)^2 \varepsilon_0 E(a + da)$$

$Q(a + da) - Q(a) = \rho(a) \cdot 4\pi (R_i + a)^2 da$. En se limitant aux termes en da (on néglige ceux en $(da)^2$ etc.) il vient

$$\boxed{\rho(a) = \varepsilon_0 \left[\frac{dE}{da} + 2\frac{E(a)}{R_i + a}\right]}$$

b) Un élément de volume $d\mathcal{V} = \Delta S \cdot da$ porte la charge $\rho(a)\Delta S da$ et est placé dans le champ $E(a)$. Il subit donc la force $dF = \rho(a)\Delta S da E(a)$. Pour l'élément de surface total (d'épaisseur A) on aura donc

$$\Delta F = \int_0^A \rho(a)\, da E(a) \Delta S$$

soit

$$\Delta F = \Delta S\, \varepsilon_0 \int_0^A \left[\frac{dE}{da} + 2\,\frac{E(a)}{R_i + a}\right] E(a)\, da$$

$$\Delta F = \varepsilon_0 \Delta S \left[\int_0^A d\left(\frac{E^2}{2}\right)\right] + 2\varepsilon_0 \Delta S \int_0^A \frac{E^2(a)}{R_i + a} da .$$

Or, $$\int_0^A d\left(\frac{E^2(a)}{2}\right) = \frac{E^2(A) - E^2(0)}{2} = \frac{E_0^2}{2}$$

donc

$$\boxed{\Delta F = \varepsilon_0 \Delta S \left[\frac{{E_0}^2}{2} + 2\int_0^A \frac{E^2(a)}{R_i + a} da\right]}$$

Si $E(a)$ est borné $E(a) \leq B \quad \int_0^A \dfrac{E^2(a)}{R_i + a} da \leq B^2 \int_0^a \dfrac{da}{R_i + a} = B^2 \ln\left(\dfrac{R_i + \Delta}{R_i}\right) \approx \dfrac{B^2 A}{R_i}$

$\to 0$

$A \to 0$

Donc quand $A \to 0$

$$\boxed{\Delta F = \varepsilon_0 \Delta S \frac{E_0^2}{2}}$$

d) On définit le champ superficiel par

$$\Delta F = \Delta Q \cdot E_S$$

$$\Delta Q = \int_0^A \rho(a)\,\Delta S\,da = \Delta S \cdot \varepsilon_0 \int_0^A \left[\frac{dE}{da} + 2\,\frac{E(a)}{R_i + a}\right] da = \varepsilon_0 \Delta S \left[E_0 + 2\int_0^A \frac{E(a)}{R_i + a}\,da\right]$$

Si $E(a)$ est borné $E(a) \leq B$ $\int_0^A \frac{E(a)\,da}{R_i + a} \leq B\int_0^A \frac{da}{R_i + a} = B \ln \frac{R_i + a}{R_i} = \frac{BA}{R_i}$

$\to 0$ quand $A \to 0$

il vient donc

$$\Delta Q \approx \varepsilon_0 E_0 \Delta S$$

d'où $$E_S = \frac{\varepsilon_0 \Delta S \frac{E_0^2}{2}}{\varepsilon_0 E_0 \Delta S}$$

soit $$\boxed{E_S = \frac{E_0}{2}}$$

En 09 -a) on a trouvé $\mathcal{C}_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ d'où $E_S = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. On retrouve bien le résultat de 8.

10 - $\mathcal{E}_p = \frac{Q\sigma R}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

Quand R varie de dR $d\mathcal{E}_p = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\,dR$

le travail de la suppression est $dW = +\,p.4\pi R^2\,dR$ (en raison de l'orientation de Δ F)

la variation totale d'énergie est donc

$$\boxed{dW_T = \left[-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} + p\ 4\pi R^2\right] dR}$$

À l'équilibre $\frac{dW_T}{dR} > 0$ donc

$$p = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}.$$

Comme $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ il vient $\boxed{p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\Delta F}{\Delta S}}$

La charge portée par ΔS est $\sigma \Delta S$. Donc le champ superficiel est

$$E_s = \frac{\Delta F}{\sigma \Delta S}$$

soit $\boxed{Es = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

On retrouve le même résultat que précédemment

AN $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma.4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$ $p = \frac{\varepsilon_0^2 V^2}{2R^2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2R^2}$

$$\boxed{p = 8{,}84.10^{-6}\ Pa} \quad (!\ !)$$

11 - La suppression due à la tension superficielle est maintenant $\frac{4T}{R}$ (voir un ancien cours de math sup). Le même calcul qu'en 10 conduit à :

$$dW_T = \left[-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} + p\ 4\pi R^2 + \frac{4T}{R}.4\pi R^2\right] dR$$

À l'équilibre

$$\boxed{p + \frac{4T}{R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

AN $T = \frac{pR}{8}$ d'où $\boxed{T = 1{,}01.10^{-6} N.m^{-1}}$

Partie IV

12 - Toujours par le théorème de Gauss $E(r).4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$ d'où $\boxed{Q(r) = 4\pi\varepsilon_0 E r^2}$

puisque E est constant.

Par ailleurs $Q = \int_0^R \rho(r).4\pi r^2\ dr$

$dQ = 8\pi\varepsilon_0 E r\ dr$ donc $Q = \int_0^R 8\pi\varepsilon_0 E.r\ dr.$

On identifie

$$\rho(r)\, r^2 = 2\varepsilon_0 E r$$

$$\boxed{\rho(r) = \frac{2\varepsilon_0 E}{r}}$$

13 - $-dV = \int E(r)\, dr = E\int dr$

On intègre entre 0 et r

$$V(0) - V(r) = Er$$

d'où $\boxed{V(r) = V(0) - Er}$

en $r = R$ $\boxed{V(R) = V(0) - ER}$

Partie V

14 - On connaît l'équivalence $I\,\overrightarrow{d\ell} = Q\vec{v}$. Or $\vec{v} = v\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

donc

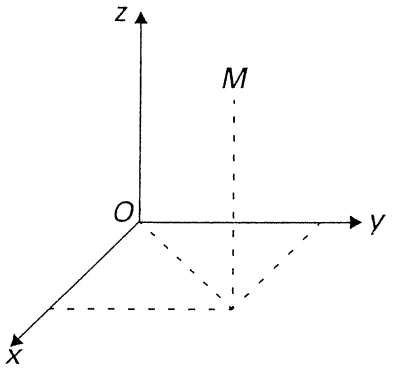
$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM} = vy\,\vec{e}_z - vz\,\vec{e}_y$$

d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qv}{r^3}\left(y\vec{e}_z - z\vec{e}_y\right)}$$

$$B = \left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qv}{r^3}\sqrt{y^2+z^2}$$

15 - $W = \dfrac{1}{2\mu_0}\iiint_{espace} B^2\,d\mathscr{V}$. On se place en sphériques (r, θ, φ).



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\frac{{\mu_0}^2}{16\pi^2}Q^2v^2\iiint_{espace}\frac{y^2+z^2}{r^6}\,d\mathscr{V} = \frac{\mu_0 Q^2v^2}{32\pi^2}\iiint_{espace}\frac{r^2\sin^2\theta}{r^6}\,d\mathscr{V}$$

$$= \frac{\mu_0 Q^2v^2}{32\pi^2}\iiint_{espace}\frac{d\mathscr{V}\sin^2\theta}{r^4} \qquad d\mathscr{V} = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,dy$$

$$W = \frac{\mu_0 Q^2v^2}{32\pi^2}\iiint_{espace}\frac{\sin^3\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0 Q^2v^2}{32\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{dr}{R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 Q^2v^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{R}\right)\cdot 2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 Q^2v^2}{16\pi R}\left[(-\cos\theta)_0^{\pi} - \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 Q^2v^2}{16\pi R}\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}\frac{\mu_0 Q^2v^2}{16\pi R} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{W = \frac{\mu_0 Q^2v^2}{12\pi R}}$$

16 -

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{donc} \quad \frac{m}{2} = \frac{\mu_0 Q^2}{16\pi R} \qquad m = \frac{\mu_0 Q^2}{8\pi R}$$

$$\text{AN : } R = \frac{\mu_0 Q^2}{8\pi m} \quad R = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6^2\cdot 10^{-38}}{8\pi\cdot 9\cdot 10^{-31}} = \frac{1{,}6^2}{18}10^{-14} = 1{,}42.10^{-15}\ \text{m}$$

On retrouve la même valeur qu'à la question 6.

5 - PRODUCTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

Énoncé

01- Une bobine plate est formée de N spires circulaires ($N = 50$) de rayon moyen R ($R = 10$ cm). Le fil est parcouru par un courant d'intensité I constante ($I = 2$ A).

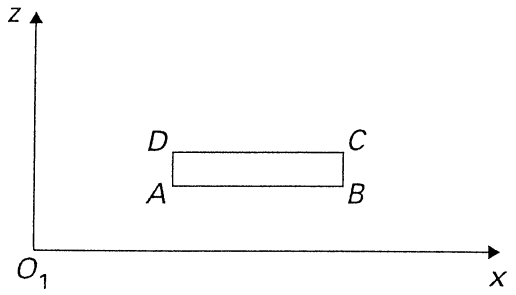
Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ en un point de l'axe situé à une distance x du centre O_1 de la bobine. (On orientera l'axe positivement dans un sens convenable).

On désignera par $\vec{B}_0$ le champ magnétique au centre de la bobine. Calculer numériquement B_0.

02 - Étudier les variations de B en fonction de x. Tracer la courbe représentant les variations de $\frac{B}{B_0} = f(x)$.

Échelle : 10 cm par unité en ordonnée, en abscisse 1 cm pour 1 cm. On précisera les symétries et la valeur des dérivées utiles aux points remarquables..

03 - On se propose d'étudier les composantes B_r, B_θ, B_s, (dans un système de coordonnées cylindriques d'axe O_1x) du champ $\vec{B}$ en un point quelconque voisin de l'axe.



ABCD étant un rectangle placé dans un plan méridien comme l'indique la figure $AB = dx$, $BC = dr$, démontrer la formule $\frac{\partial B_r}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial r} = 0$ dans laquelle B_x désigne la composante suivant O_1x et B_r la composante suivant O_1r du champ au point A (de coordonnées r et x). Démontrer que la composante B_θ perpendiculaire au plan méridien est nulle.

04 - ABCD tournant autour de O_1x d'un angle $d\theta$ engendre un élément de volume ABCD $A'B'C'D'$. En utilisant une deuxième propriété fondamentale du champ magnétique, démontrer :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r \cdot B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

05 - On justifiera par des raisonnements simples utilisant des notions de parité que les composantes B_r et B_x du champ en un point de coordonnées r et x peuvent être mises sous la forme de développements limités tels que :

$B_x(r, x) = b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4 + \ldots$

$B_r(r, x) = b_1 r + b_3 r^3 + \ldots$ où b_0, b_2, $b_3 \ldots$ sont des fonctions de x seul.

Que représente b_0 ?

En utilisant les équations établies aux 3° et 4°, calculer b_1, b_2, b_2, b_4 en fonction des dérivées successives de b_0.

06 - Calculer $\frac{B_r}{B_x}$ en un point de coordonnées $x = R$, $r = \frac{R}{20}$ puis au point de coordonnées $x = r = \frac{R}{20}$, en utilisant les développements précédents limités au premier ordre en r.

07 - Le centre de la bobine précédente étant en O_1, soit une deuxième bobine identique de même axe, parcourue par un courant de même sens et dont le centre O_2 est placé à une distance $O_1O_2 = 2X$ de O_1.

Montrer que pour une valeur de X convenable, le champ magnétique B varie d'un infiniment petit du quatrième ordre par rapport à x_1 lorsqu'on passe du point O au milieu de O_1O_2 à un point M de l'axe très voisin de O, avec $\overline{OM} = x_1$. On pourra utiliser le graphe de la deuxième question. Tracer alors la courbe donnant les variations du champ résultant en fonction de x_1 sur le même graphe qu'à la deuxième question.

08 - Établir que lorsque X ayant cette valeur, on passe du point O à un point M', situé dans le plan passant par O perpendiculaire à l'axe ($\overline{OM'} = r$), B_x varie d'un infiniment petit du quatrième ordre par rapport à r.

En conclure que le champ peut être alors considéré comme uniforme dans un petit volume autour de O.

(Concours spécial)

SOLUTION

01 - En utilisant les résultats de l'exercice 3, chapitre 8, il vient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{x}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R}\vec{x}$$

$$B_0 = 6{,}28.10^{-4}\ \text{T}$$

, $\vec{x}$ unitaire de Ox étant orienté par le sens du courant

02 -

$$\frac{B}{B_0} = \left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} = f(x)$$

$$f'(x) = -\frac{3x}{R^2}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-5/2}$$

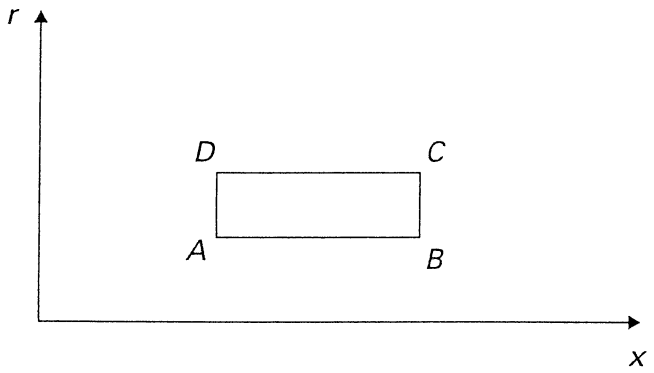
$$f''(x) = -\frac{3}{R^2}\left(1-\frac{4x^2}{R^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-7/2}$$

La courbe présente une symétrie par rapport à l'axe $x = 0$ et deux points d'inflexion en $\pm\frac{R}{2}$

$$f\left(\pm\frac{R}{2}\right) = 0{,}72 \quad f'\left(\pm\frac{R}{2}\right) = 8{,}58.10^{-2}\ \text{cm}^{-1}.$$

d'où le graphe (voir à la fin de la solution).

03 -



D'après le théorème d'Ampère $\oint \vec{B}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I = 0$

donc $$B_x(r,x)\,dx - B_x(r+dr,x)\,dx + B_r(x+dx,r)\,dr - B_r(x,r)\,dr = 0$$

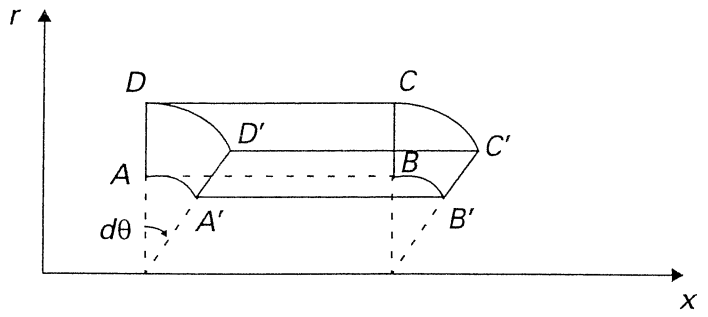
d'où

$$\frac{\partial B_r}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial r}$$

Le plan méridien est un plan d'antisymétrie (à cause du sens du courant). Deux éléments symétriques par rapport à ce plan produisant donc des champs magnétiques dont les composantes perpendiculairement à ce plan seront opposées. Donc

$$B_\theta = 0$$

04 -



$\vec{B}$ est à flux conservatif. Donc le flux de $\vec{B}$ sortant de la surface fermée ci-dessus est nul.

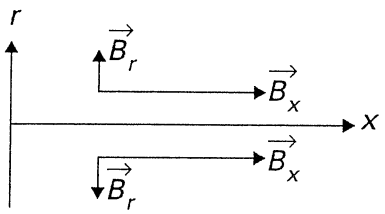
$$[B_x(x+dx) - B_r(x)]\, r d\theta dr + B_r(r+dr) \cdot dx(r+dr)\, d\theta - B_r(r)\, dx r d\theta = \rho$$

$$r\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = 0$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0}$$

05 - Les expressions à démontrer sont les premiers termes du développement en série. Les b_i sont de façon évidente des fonctions de x seulement car ce sont les dérivées successives à n ! près de B_r et B_x prises au point $r = 0$, x quelconque.



Vue la symétrie de révolution

$$B_x = (x, r) = B_x(x, -r)$$
$$B_r = (r, x) = -B_r(-r, x)$$

Donc

B_x est pair vis-à-vis de r

B_r est impair vis-à-vis de r

$b_0 = B_x(x, 0)$

Les relations établies précédemment conduisent à :

$$\boxed{b_1 = -\frac{b_0'}{2} \qquad b_2 = -\frac{b_0''}{4} \qquad b_3 = +\frac{b_0'''}{16} \qquad b_4 = \frac{b^{(4)}}{64}}$$

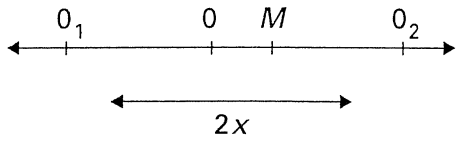
06 - Dans les deux cas $r = \frac{R}{20}$. Donc en premier ordre

$$\frac{B_r}{B_x} = \frac{3}{40}\frac{x/R}{\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)}$$

A.N $\quad x = R \quad \dfrac{B_r}{B_x} = 3{,}75.10^{-2}$

$x = \dfrac{R}{20} \quad \dfrac{B_r}{B_x} = 0{,}375.10^{-2}$

07 -



En M $\dfrac{B_x(x_1)}{B_0} = f(X+x_1) + f(X-x_1)$

$$\frac{B_x(x_1)}{B_0} = 2f(X) + \frac{x_1^2}{2}(f'' + f'') + \frac{x_1^4}{4}(2f''')$$

En $x = \pm\dfrac{R}{2}$, f s'annule d'où le choix de

$$\boxed{2X = R}$$

et le graphe. On voit que B_x est constant au 4 ôrdre près en $\dfrac{x}{R}$.

08 -

$$B_{1x}\left(r, \frac{R}{2}\right) = b_0\left(\frac{R}{2}\right) + b_2\left(\frac{R}{2}\right) \cdot r^2 + b_4\left(\frac{R}{2}\right) r^4$$

$$B_{2x}\left(r, \frac{-R}{2}\right) = b_0\left(-\frac{R}{2}\right) + b_2\left(-\frac{R}{2}\right) r^2 + b_4\left(-\frac{R}{2}\right) r^4$$

Or, $b_2 = -\dfrac{b_0''}{2} = 0$ donc

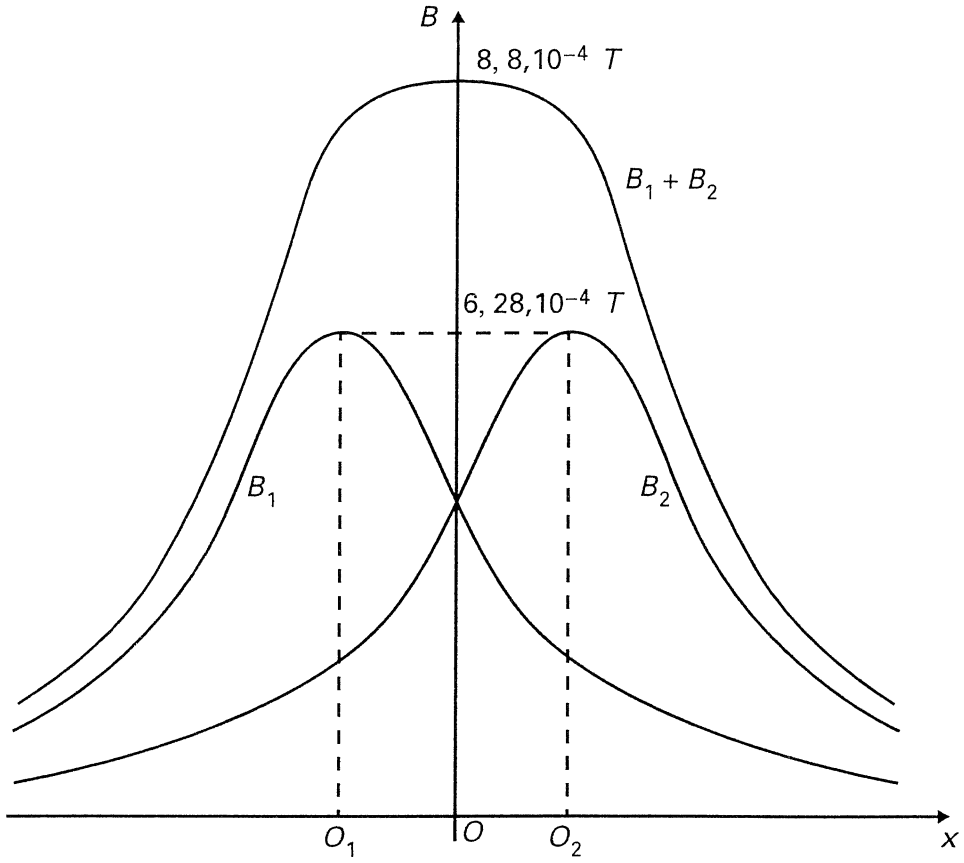
$B_x\left(r, \dfrac{R}{2}\right)$ varie d'un infiniment petit du 4e ordre par rapport à r.

Étudions $B_r(r, M)$

$$B_r(r, M) = \underbrace{\left[b_1\left(\frac{R}{2}\right) + b_1\left(-\frac{R}{2}\right) \right]}_{=0} r + \underbrace{\left[b_3\left(\frac{R}{2}\right) + b_3\left(-\frac{R}{2}\right) \right]}_{=0} r^3 = 0$$

Donc $\vec{B}$ peut être considéré comme uniforme dans un petit volume autour de O.

On obtient les courbes suivantes



6 - MODÉLISATION DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE

Énoncé

Partie I : Champ magnétique d'un dipôle

On considère un dipôle magnétique placé à l'origine O d'un repère galiléen $\mathfrak{R}Oxyz$ et de moment dipolaire M parallèle à l'axe Oz. On se place dans tout ce paragraphe à une distance r grande devant les dimensions du dipôle.

On étudie les phénomènes en coordonnées sphériques (r, θ, φ) (cf. figure 1).

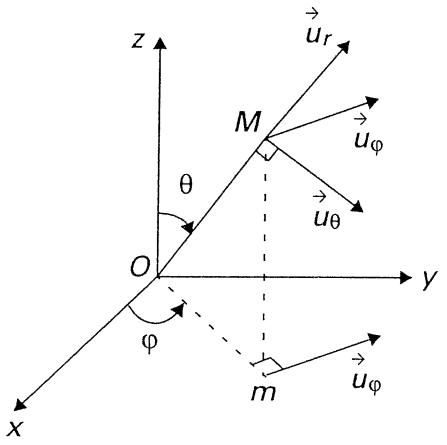


Figure 1

01 - On peut toujours représenter le dipôle par une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité i. Rappeler la relation entre i, R, et le vecteur $\vec{M}$. La représentation du dipôle est-elle unique ?

02 - Rappeler les composantes du champ magnétique $\vec{B}$ créé par un dipôle à grande distance.

Montrer que ce champ se met sous la forme vectorielle

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{M})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}$$

indépendante du système de coordonnées.

03 - Donner l'équation différentielle des lignes de champ et la résoudre en coordonnées sphériques (r, θ, φ). Montrer qu'elle est de la forme $r = r_e \sin^2\theta$, où r_e est une constante dont on donnera la signification géométrique. On appellera par la suite cette constante distance équatoriale de la ligne de champ.

04 - Représenter graphiquement l'allure des lignes de champ pour $r_e = 1{,}5$; $r_e = 3$; $r_e = 5$.

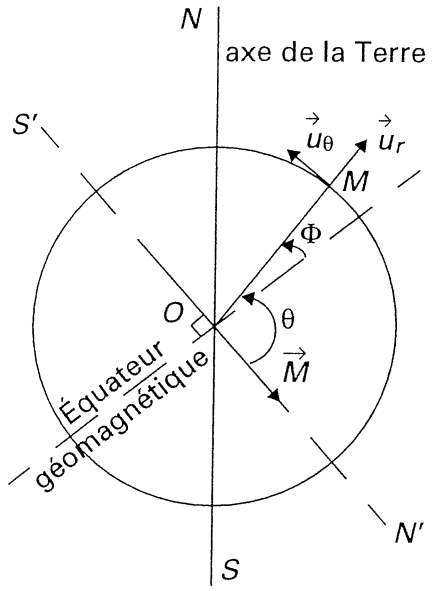
05 - Déterminer la variation de l'intensité du champ magnétique en fonction de θ le long d'une ligne de champ. Représenter graphiquement la fonction $f(\theta) = \dfrac{4\pi r_e^3 B(\theta)}{\mu_0 M}$.

Cette fonction est-elle partout physiquement satisfaisante ? Justifier votre réponse.

Partie II : Champ magnétique de la Terre

La Terre possède un champ magnétique intrinsèque, appelé champ géomagnétique, provenant du mouvement de particules chargées de son noyau fluide. En première approximation, ce champ est celui d'un dipôle placé au centre O de la Terre, de moment dipolaire tel que $\frac{\mu_0 M}{4\pi} = 8{,}3.10^{15}\ T \cdot m^3$, présentant une inclinaison $\alpha = 11°$ par rapport à l'axe de rotation terrestre. Son axe sud-nord, appelé axe géomagnétique, est inversé par rapport à l'axe géographique sud-nord. Le grand cercle de la surface terrestre de centre O et perpendiculaire à l'axe géomagnétique est appelé équateur géomagnétique.

On appelle R le rayon de la Terre, supposée de forme sphérique. Un point M à la surface terrestre ou dans l'espace est repéré par sa latitude géomagnétique Φ, égale à l'angle formé entre le plan de l'équateur géomagnétique et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. (cf. Figure 2).



01 - Déterminer à la surface de la Terre l'intensité B du champ géomagnétique et son inclinaison $I = (\vec{B}, \vec{u}_\theta)$ par rapport à l'horizontale en fonction de Φ. Donner l'expression numérique de B sachant que $R = 6\,378$ km. Représenter graphiquement les fonctions $B(\Phi)$ et $I(\Phi)$. Où l'intensité du champ est-elle maximale ?

02 - On dit fréquemment qu'une boussole s'approchant d'un des deux pôles géomagnétiques (points de la surface terrestre où $\Phi = \pm 90°$) devient "folle". Pouvez-vous justifier ceci ?

03 - Pour Paris, on peut adopter la valeur $\Phi = 52°$. Donner les valeurs numériques théoriques B et de I et le sens du champ géomagnétique à Paris. Les valeurs expérimentales sont $B = 4{,}7.10^{-5}\ T$ et $I = -64{,}5°$. Conclusion.

04 - On étudie maintenant le champ géomagnétique dans l'espace. Pour une ligne de champ de distance équatoriale r_e, on définit le paramètre de McIlwain : $L = \frac{r_e}{R}$. Donner

l'expression numérique de B sur une ligne de champ en fonctions de L et de Φ. En déduire les deux latitudes $\pm\Phi_m$ où la ligne de champ traverse la surface terrestre. Que vaut l'inclinaison I en ces deux points ?

05 - Le rayon de courbure en un point M d'une courbe plane d'équation $r = f(\Phi)$ est donné par l'expression :

$$r_c = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\Phi}\right)^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Phi}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\Phi^2}\right)}$$

Déterminer le rayon de courbure à l'équateur d'une ligne de champ en fonction de L et de R.

06 - Représenter graphiquement dans un plan méridien (passant par les pôles goémagnétiques) les lignes de champ correspond à L = 1,5 ; 3 ; 5 *à l'extérieur de la Terre* et donner les valeurs numériques Φ_m et de I pour chacun de ces lignes.

(TPE)

(Remarque : cet énoncé a été légèrement modifié de manière à être conforme aux programmes actuels.)

SOLUTION

Partie I

01 - $\vec{k}$ étant le vecteur unitaire normal au plan de la spire, orienté par le sens du courant

$$\boxed{\vec{M} = I\pi R^2 \vec{k}}$$

La représentation du dipôle n'est pas unique puisque à $\vec{M}$ donné correspond une infinité de jeux (I, R) tels que $IR^2 = cte$.

02 - En utilisant les composantes B_r et B_θ données dans le cours, il vient :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 M\cos\theta}{2\pi r^3}\vec{u}_r + \frac{\mu_0 M\sin\theta}{4\pi r^3}\vec{u}_\theta}$$

On peut donner une autre expression de $\vec{B}$ en remarquant que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{M\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{M\cos\theta}{r^2}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{M\cos\theta}{r^2}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{M\cos\theta}{r^2}\right) = -\frac{2M\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r - \frac{M\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta .$$

Donc

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{M\cos\theta}{r^2}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{M}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)}$$

Or, $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{M}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}\cdot\vec{r}) + (\vec{M}\cdot\vec{r})\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r^3}$.

Comme $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}\cdot\vec{r}) = \vec{M}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$ il vient

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{M}}{r^3} - \frac{3(\vec{M}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]$$

qui est bien l'expression donnée dans l'énoncé

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{M})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}}$$

Cette expression vectorielle est, bien entendu, indépendante du système de coordonnées.

03 - Les lignes du champ dans un plan $\varphi = cte$ sont données par

$$\frac{\frac{\mu_0 M\cos\theta}{2\pi r^3}}{dr} = \frac{\frac{\mu_0 M\sin\theta}{4\pi r^3}}{rd\theta}$$

soit

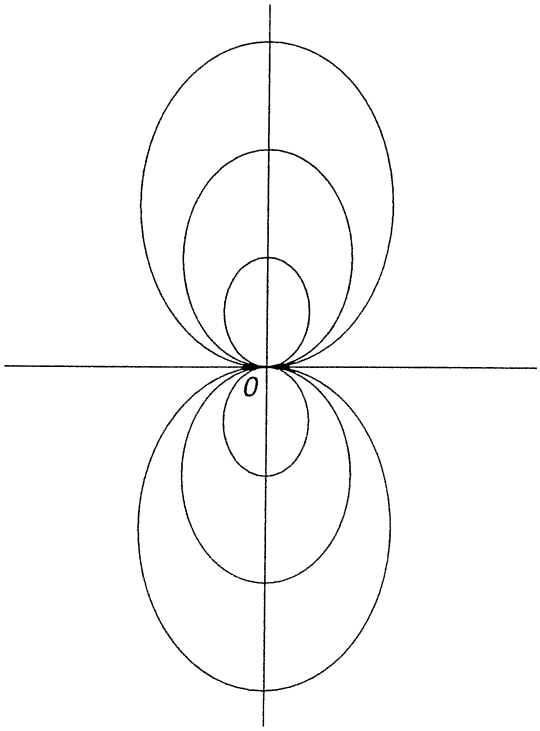
$$\frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta}.$$

L'intégration conduit bien à l'expression

$$\boxed{r = r_e \sin^2\theta}$$

La constante d'intégration r_e correspondant à la valeur de r obtenue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (c'est la valeur maximale de r).

04 - Dans tout plan $\varphi = cte$ les lignes de champ correspondant aux valeurs $r_e = 1{,}5$; $r_e = 3$; $r_e = 5$ ont l'allure ci-dessous.



05 -
$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

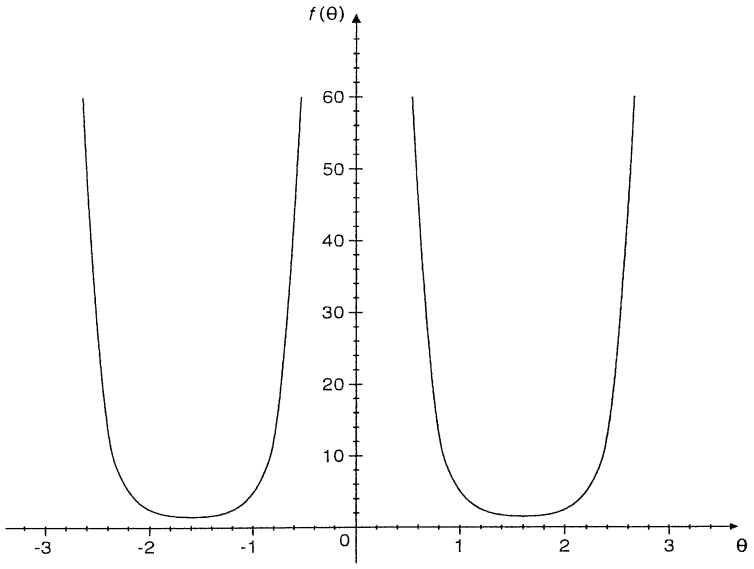
Le long d'une ligne de champ $r = r_e \sin^2\theta$ d'où

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r_e^{\,3}} \frac{\sqrt{4 - 3\sin^2\theta}}{\sin^6\theta}}$$

La fonction $f(\theta)$ introduite est

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{4 - 3\sin^2\theta}}{\sin^6\theta}$$

La courbe représentative sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ a l'allure suivante :



Cette fonction n'a pas de signification physique lorsque $\theta \to 0$ ou $\pm\pi$, car alors $r \to 0$,et les calculs faits ci-dessus, n'ont de signification que si r est très grand devant les dimensions du dipôle.

Partie II

01 - On utilise les résultats de la première partie

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

soit

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

ou

$$\boxed{B(\Phi) = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\sqrt{3\sin^2\phi + 1}}$$

L'inclinaison I est telle que

$$\cos I = \frac{B_\theta}{B}$$

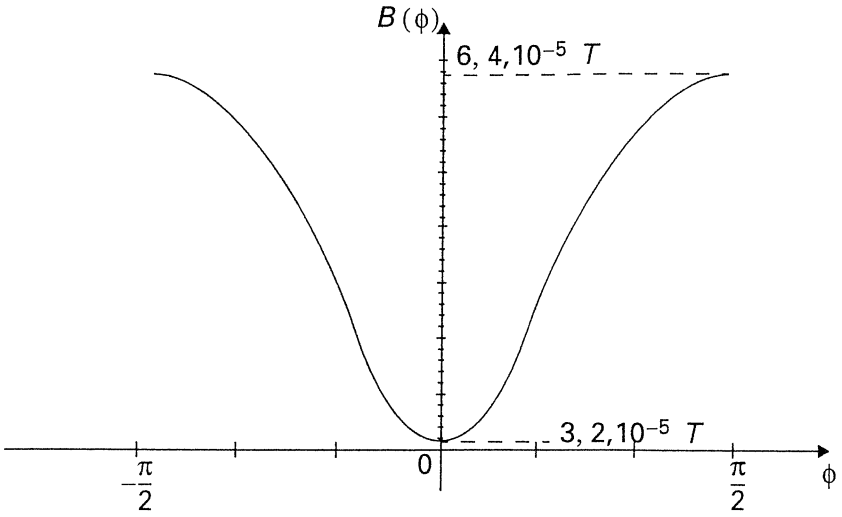
soit

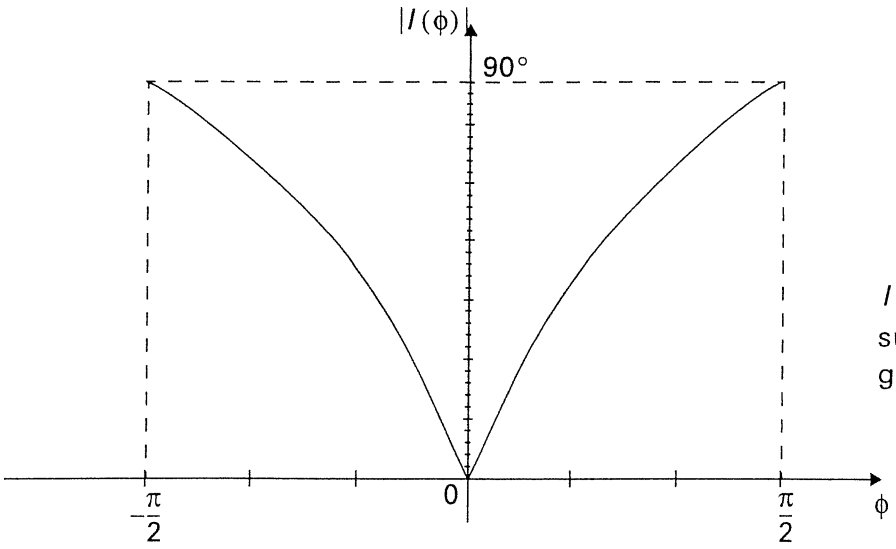
$$\boxed{\cos I = \frac{\cos\phi}{\sqrt{3\sin^2\phi + 1}}}$$

Numériquement

$$\boxed{B(\phi) = 3{,}2.10^{-5}\sqrt{3\sin^2\phi + 1}}$$

Les courbes $B(\phi)$ et $I(\phi)$ ont les allures suivantes :





$I < 0$ dans l'hémisphère sud magnétique (nord géographique)

L'intensité du champ est maximale au pôle sud magnétique.

02 - Il n'existe plus de composante B_h horizontale au pôle magnétique : la boussole étant montée horizontalement, elle ne peut plus détecter de $\vec{B}$ (elle piquait vers le sol si la monture le permettait).

03 - Numériquement on trouve :

$$B = 5{,}41.10^{-5}\ T \qquad I = -68{,}6°$$

L'écart est relativement peu important sur I. Il est important sur B (14 %).

04 - Sur une ligne de champ $r_e = LR$

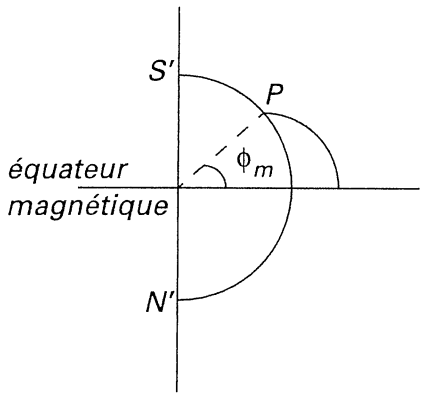
$$B = \frac{B_0}{L^3}\,\frac{\sqrt{4 - 3\cos^2\phi}}{\cos^6\phi}$$

en posant $B_0 = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi R^3}$.

La ligne de champ rencontre la surface terrestre lorsque

$$B_0\sqrt{3\sin^2\phi + 1} = \frac{B_0}{L^3}\,\frac{\sqrt{4 - 3\cos^2\phi}}{\cos^6\phi}$$

soit $L^3\cos^6\phi = 1$.



En P $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{L}}$

d'où

$$\boxed{\phi_m = \pm \text{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{L}}}$$

L'inclinaison vaut alors I_m telle que

$$\boxed{\cos I_m = \frac{1}{\sqrt{4L - 3}}}$$

05 - $r = r_e\sin^2\theta = LR\cos^2\phi$

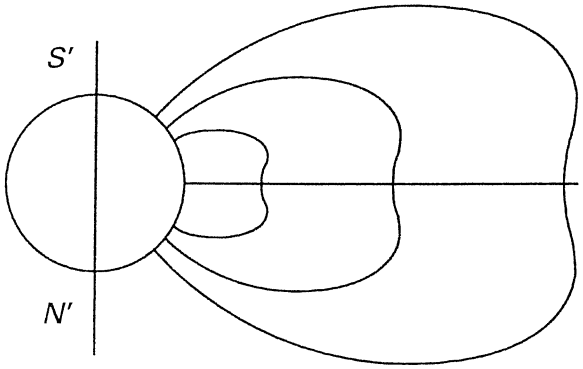
$$\frac{dr}{d\phi} = -LR\sin 2\phi \qquad \frac{d^2r}{d\phi^2} = -2LR\cos 2\phi$$

d'où

$$\boxed{r_c = LR\cos\phi\sqrt{3\sin^2\phi + 1}}$$

06 -

L	1,5	3	5
ϕ_m	35,5°	54,7°	63,43°
I_m	– 54,7°	– 70,5°	–76°



allure des lignes de champ.

Achevé d'imprimer en août 1995 dans les ateliers de Normandie Roto Impression s.a.
61250 Lonrai – N° d'imprimeur : I5-1523 – Dépôt légal : août 1995

SOYONS "PRÉCIS" ...
...en physique-chimie

Une méthode rapide, rationnelle, efficace.
Une formule qui a fait ses preuves.

- Un **cours clair et concis,** qui couvre tout le programme.
- De **nombreux exercices corrigés,** adaptés aux exigences des concours.
- Des **nouvelles éditions** conformes aux programmes et aux **spécificités des filières.**

Physique

- **Mécanique 1re année** (MPSI, PCSI, PTSI)
- **Mécanique 1re année** (complément PCSI)
- **Mécanique 2e année**
- **Electrocinétique 1re année** (MPSI, PCSI, PTSI)
- **Electromagnétisme 1re année** (MPSI, PCSI, PTSI)
- **Electricité 2e année**
- **Thermodynamique 1re année** (MPSI, PCSI)
- **Optique 1re année** (MPSI, PCSI, PTSI)
- **Optique 2e année**

Chimie

- **Chimie 1re année** (MPSI, PTSI)
- **Thermodynamique et cinétique chimique**
- **Solutions aqueuses**
- **Atomistique et chimie minérale**
- **Chimie organique 1re et 2e année** (PCSI, PC)

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

9 782853 947909

Réf : 209.0321 Dépôt à Paris : Librairie des Prépas - 34, rue Serpente - 75006 PARIS ISBN : 2 85394 790 4

CLASSES PRÉPARATOIRES - PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

4